مقاومت مصالح (ویژه کنکور کارشناسی ارشد عمران)

۱- مقدمه ۲
۲- تنش و کرنش ۳
۳- بارگذاری محوری ۷
۳-۱- خطای ساخت ۱۷
۳-۲- تغییرشکل محوری میله های مایل ۲۰
۴- تغییر شکل محوری سازه های نامعین ۳۰
۵- ضریب پواسون ۳۳
۶- حرارت ۴۳
۷- دایره مورتنش (2D) ۵۴
۸- دایره مورتنش (3D) ۶۷
۹- دایره مورکرنش ۷۰
۱۰- گلبرگ کرنش ۷۳
۱۱- مخازن ۷۴
۱۲- پیچش ۷۹
۱۲-۱- مقطع دایروی ۷۹
۱۲-۲- مقاطع جدارنازک بسته ۸۰
۱۲-۳- مقاطع جدار نازک باز ۸۰
۱۲-۴- سهم مقطع از پیچش ۸۷
۱۲-۵- مقاومت پیچشی ۹۲
۱۲-۶- اتصالات تحت اثر پیچش ۹۸
۱۲-۷- تحلیل سازه های تحت پیچش ۱۰۳
۱۲-۸- مقاطع غیر دایروی ۱۱۰
۱۳- خمش ۱۱۱
۱۳-۱- ظرفیت خمشی ۱۲۴
۱۳-۲- تیر بر روی بستر صلب ۱۲۵
۱۳-۳- سهم لنگر ۱۲۶
۱۳-۴- خمش دو محوره ۱۳۰
۱۳-۵- ترکیب خمش با نیروی محوری ۱۳۳
۱۳-۶- خمش دو محوره همراه با نیروی محوری ۱۳۶
۱۳-۷- ترکیب خمش و پیچش ۱۴۰
۱۳-۸- مقاطع مرکب ۱۴۱
۱۳-۹- شعاع انحنا ۱۴۵
۱۳-۱۰- آنالیز ابعادی ۱۵۲
۱۳-۱۱- هسته خمش ۱۵۵
۱۴- بار گذاری عرضی (برش) ۱۵۷
۱۴-۱- تنش برشی در مقطع توپر ۱۵۷
۱۴-۲- جریان برش در مقاطع جدارنازک ۱۶۳
۱۴-۳- تنش در مقاطع جدارنازک ۱۶۶
۱۴-۴- اتصال با میخ ۱۷۲
۱۴-۵- تنش برشی در مقاطع با عرض متغیر ۱۷۴
۱۴-۶- مرکز برش ۱۷۶
۱۴-۷- ترکیب برش، پیچش و خمش ۱۸۱
۱۴-۸- سهم برش ۱۸۳
۱۴-۹- تغییر شکل برشی ۱۸۴
۱۵- مدل سازی با فنر ۱۸۵
۱۶- کمانش ۱۹۳
۱۶-۱- کمانش ستون صلب ۱۹۳
۱۶-۲- کمانش ستون الاستیک ۱۹۴

۱-مقدمه

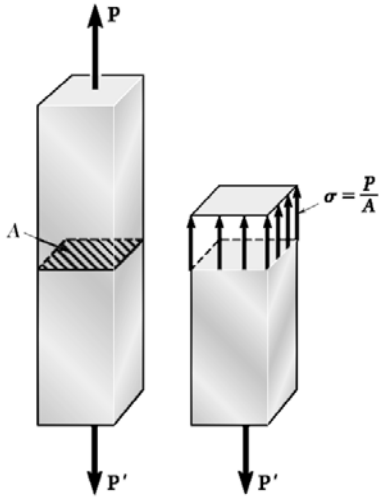
داوطلب گرامی ضمن آرزوی پیروزی برای شما قبل از استفاده از جزوه مطالب زیر را مطالعه بفرمایید:

- ✓ این جزوه جهت تدریس سرکلاسی و افزایش سرعت تدریس تهیه شده و بنابراین کامل نیست! برخی از مطالب توضیح داده نشده و پاسخ برخی تستها ناقص است. داوطلبان کنکور بهتر است از منابع مختلفی که موجود است نیز استفاده کنند: کتاب مرجع: مقاومت مصالح جانستون
  کتاب تست: ۱- مقاومت مصالح دکتر عرفانی انتشارات گاج ۲- کتاب مقاومت مصالح با نظارت علمی دکتر فنایی انتشارات سیمای دانش- سری عمران ۳- کتاب جامع مقاومت مصالح دکتر فنایی انتشارات راهیان ارشد (این کتاب درسنامه کمتری دارد و برای کسانی مناسب است که نیاز به تست های بیشتر و سنگین تر دارند).
- ✓ این جزوه در فرصت های مناسب ویرایش و کامل تر خواهد شد (تاریخ ویرایش جزوه در قسمت فوقانی صفحات درج شده است).
- ✓ استفاده از جزوه با ذکر منبع آن (**www.hoseinzadeh.net**) بلامانع است.
- ✓ مسلما جزوه خالی از اشتباه نیست. در صورتی که به اشتباهی برخوردید، ممنون می شوم که از طریق سایت اطلاع دهید تا در ویراش بعدی اصلاح شود.

حسین زاده
۱۳۹۰/۲/۱۰

۲-تنش و کرنش

تنش= نیرو بر واحد سطح $\sigma = \frac{P}{A}$



تفاوت تنش با فشار چیست؟

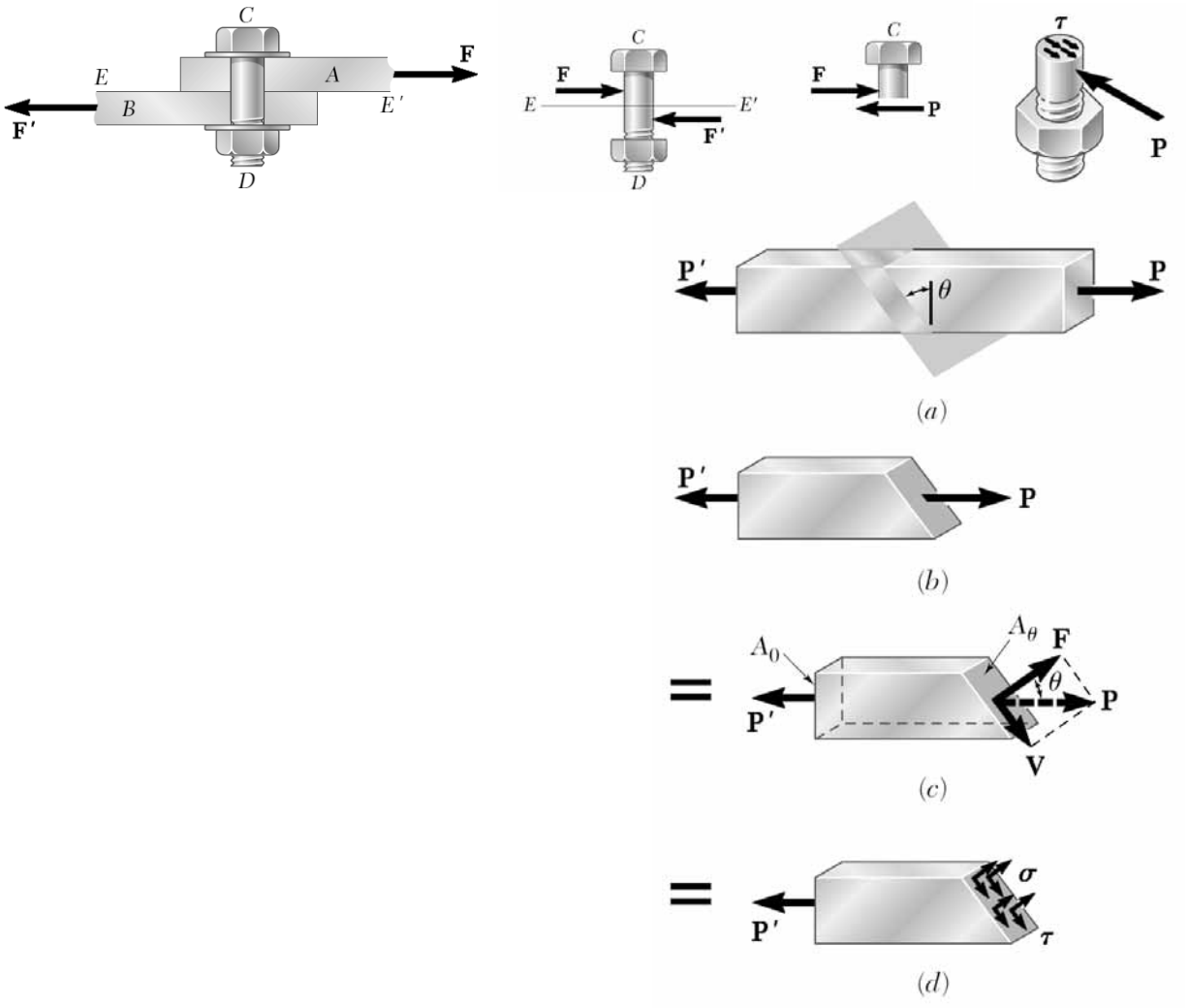
تفاوت تنش با فشار: فشار همیشه برسطح عمود است---- تنش می‌تواند مولفه مماس بر سطح نیز داشته باشد.

فشار بر سطح خارجی جسم اثر می‌کند----- تنش معمولا در داخل جسم بررسی می‌شود.

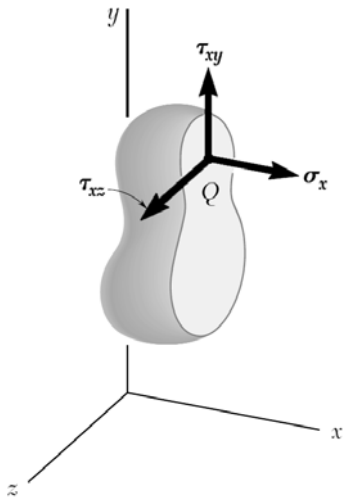
فشار اسکالر است (فقط مقدار دارد)----- تنش بردار است (مقدار وجهت دارد)

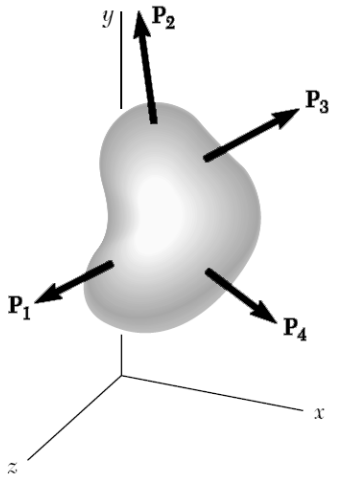
واحد هر دو نیرو بر واحد سطح است.

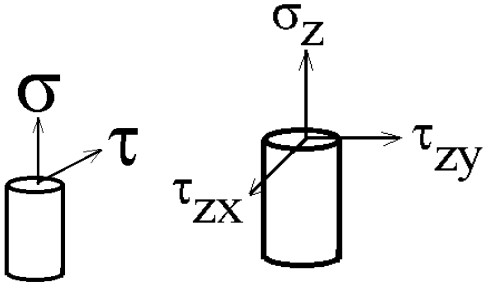
تفاوت تنش محوری با تنش برشی چیست؟

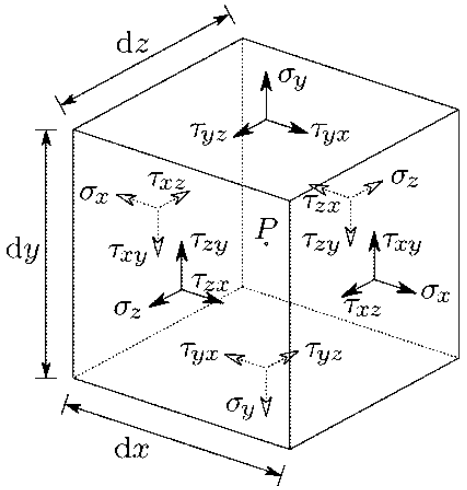


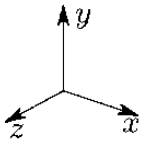
تنش را می توان به صورت بردار نشان داد:











سراسری ۸۶

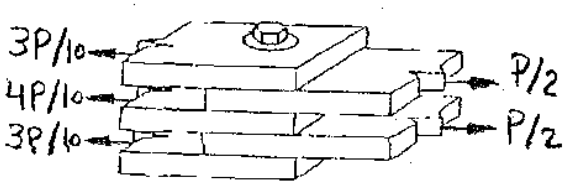
۴۹- در اتصال زیر مطابق شکل ۵ ورق فولادی که ضخامت هر یک t می‌باشد با یک پیچ با سطح مقطع A به همدیگر متصل شده‌اند و نیروی P را باید انتقال دهند. تنش برشی ماکزیمم در پیچ کدام است؟

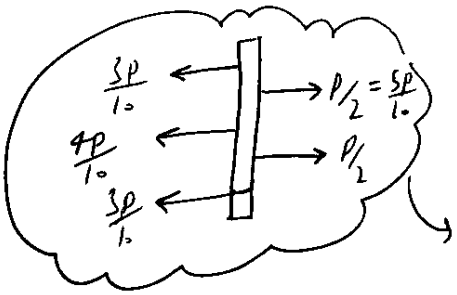
۱) $\frac{1}{4}(\frac{P}{A})$

۲) $\frac{3}{10}(\frac{P}{A})$

۳) $\frac{2}{10}(\frac{P}{A})$

۴) $\frac{1}{2}(\frac{P}{A})$

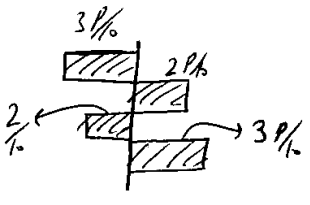




نمودار برش در پیچ ها

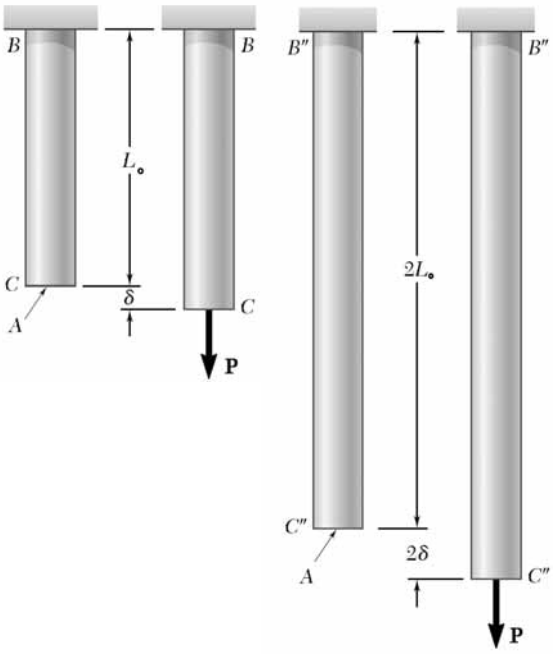
حداکثر نیروی برشی در پیچ برابر $V=\frac{3P}{10}$ است

$\tau=\frac{V}{A}=\frac{3P}{10A}$



کرنش چیست؟

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{2\delta}{2L}$$

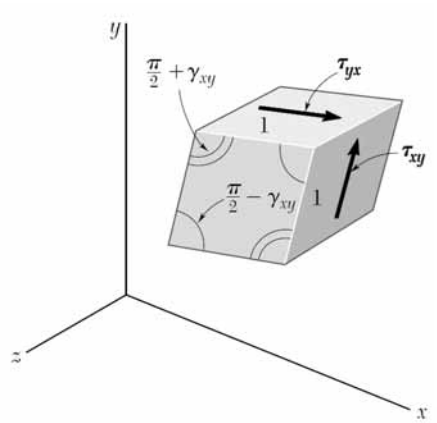


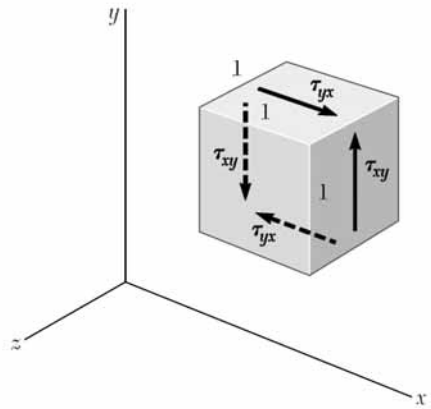
طول اولیه (قبل از اعمال نیرو) کدام است (L یا L_0)؟

کرنش مهندسی: $\varepsilon = \frac{L-L_0}{L_0}$

کرنش واقعی: $\varepsilon = \int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \mathrm{Ln}\frac{L}{L_0}$

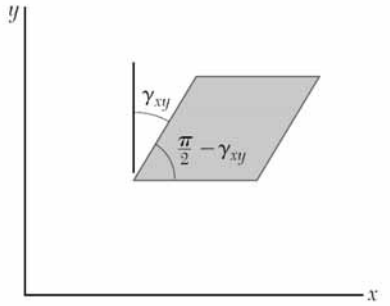
قانون هوک چیست و در چه ناحیه ای صادق است؟ $\sigma = E\varepsilon$

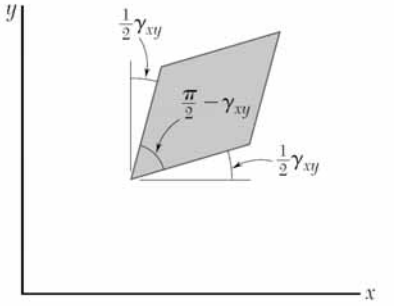




$$\tau = G\gamma$$

$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$





سراسری ۹۲

۴۷- بر اثر اعمال نیروی کششی $۳۰\,kN$ به یک میلهٔ منشوری با سطح مقطع $۳۰۰\,mm^۲$ و طول $۱۰\,cm$ ، طول آن به میـزان ۵ میلی‌متر افزایش می‌یابد. مدول یانگ مصالح این میله برابر کدام است؟

۱) $۲\times۱۰^۶\,\frac{N}{mm}$

۲) $۲\times۱۰^۳\,\frac{N}{mm}$

۳) $۲\times۱۰^۶\,\frac{N}{mm^۲}$

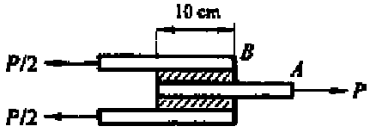
۴) $۲\times۱۰^۳\,\frac{N}{mm^۲}$

گزینه ۴:

$$\sigma = E\varepsilon \rightarrow \quad \frac{30000}{300} = E\frac{5}{100} \rightarrow \quad E = 2000\,\frac{N}{mm^2}$$

سراسری ۹۲- دکتری

۲- دو لایه لاستیکی به ابعاد $۱۰\times۱۰\times۲\,cm$ به سه ورق فولادی صلب متصل شده‌اند. ورق‌های فولادی مطابق شکل بارگذاری شده‌اند. اگر $P = ۱\,kN$ باشد، میزان تغییر مکان افقی نقطه A نسبت به B چند سانتی‌متر است؟ ضخامت عمود بر صفحه $۱۰\,cm$ و مدول الاستیسیته و ضریب پواسون لاستیک به ترتیب $E = ۳\times۱۰^۶\,\frac{N}{m^۲}$ و $\nu = ۰/۵$ است.



۱) ۰/۰۵

۲) ۰/۱

۳) ۰/۱۵

۴) ۰/۲

ضریب اطمینان:

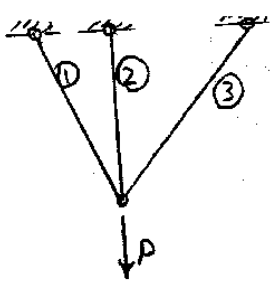
$$S.F. = \frac{\text{تنش تسلیم}}{\text{تنش مجاز}} = \frac{\sigma_Y}{\sigma_{all}}$$

تنش مجاز به مانند سرعت مجاز در جاده می ماند. برای مثال اگر حداکثر سرعت ممکن برای اتومبیل $۲۰۰\ km/hr$ باشد (تسلیم ماده σ_Y) و سرعت مجاز $۱۲۰\ km/hr$ باشد (تنش مجاز ماده σ_{all}). در این صورت ضریب اطمینان برابر 1.67 می باشد.

تنش مجاز را با σ_w (work stress) نیز نشان می دهند.

سراسری ۸۷

۵۹- در شکل روبرو طراحی چنان انجام شده که زیر اثر بار P تنش در میله‌های ۱ ، ۲ ، ۳ به ترتیب $۰/۷\sigma_\omega$، $۰/۹\sigma_\omega$ و $۰/۵\sigma_\omega$ است. ضریب اطمینان $\frac{۵}{۳}$ می‌باشد. بار P در چه ضریبی ضرب شود تا یکی از میله‌ها به تسلیم برسد؟



۱) $\frac{۳}{۵}$

۲) ۱/۵

۳) $\frac{۵}{۳}$

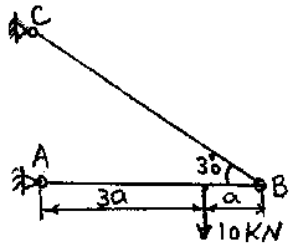
۴) $\frac{۵}{۲/۷}$

اگر بار وارد شده ، $\frac{\frac{5}{3}\sigma_w}{0.9\sigma_w} = \frac{5}{2.7}$ برابر شود، میله ۲ به تسلیم می رسد.

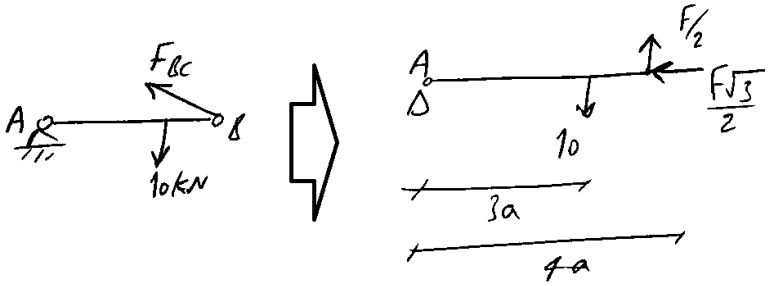
سراسری ۸۷

۵۱- در شکل روبرو اگر سطح مقطع میله‌ها هر کدام $10\ cm^2$ باشد تنش در میله BC برحسب MPa چقدر است؟

۱) ۷/۵
۲) ۱۰
۳) ۱۵
۴) ۲۰



میله BC را حذف و به جایش نیرو قرار می دهیم:

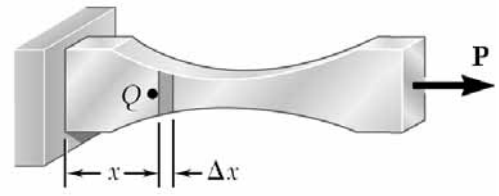


$$\sum M_A = 0$$
$$\rightarrow 10 \times 3a = \frac{F}{2} \times 4a$$
$$\rightarrow F = 15\ kN$$
$$\rightarrow \sigma = \frac{F}{A} = \frac{15000}{0.001}\frac{N}{m^2} = 15\ MPa$$

۳-بارگذاری محوری

سختی محوری چیست (K=?) و چه مفهومی دارد؟

اگر P,L,E,A در طول عضو ثابت نباشند، چه کنیم؟:



$$\Delta = \sum \frac{P(\Delta x)}{EA} = \int_0^L \frac{P}{EA}\,dx$$

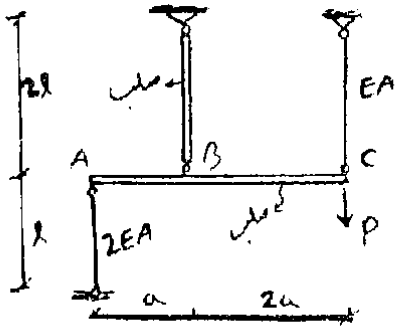
حرکت اجسام صلب در صورتی که نوع تغییر شکل مشخص باشد

اگر یک قطعه صلب توسط چند میله (یا فنر) نگه داشته شده باشد، و تغییرمکان بخواهند چه باید کرد؟

۱- تغییر مکان نقطه ای دلخواه از میله صلب را Δ فرض کرده و با توجه به اطلاعات مسئله تغییر مکان باقی نقاط را بر حسب Δ محاسبه می کنیم.
۲- سختی (K) میله های متصل شونده را محاسبه می کنیم (می توان به جای محاسبه مقادیر عددی، سختی یکی از میله ها را K فرض کرده و سختی بقیه میله را بر حسب K محاسبه نمود.
۳- نیروی هر میله را بر اساس رابطه F=KΔ محاسبه می کنیم.
۴- نمودار آزاد میله صلب را رسم کرده و با استفاده از روابط تعادل مجهولات مسئله را بدست می آوریم.

آزاد ۹۰

۴۲- در سازه نشان داده شده تغییرمکان گره C کدام است؟

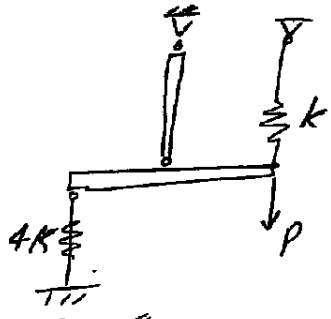


۱) $\frac{2P\ell}{EA}$

۲) $\frac{4P\ell}{3EA}$

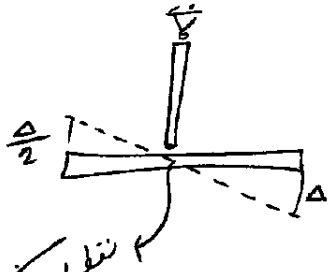
۳) $\frac{PL}{EA}$

۴) صفر

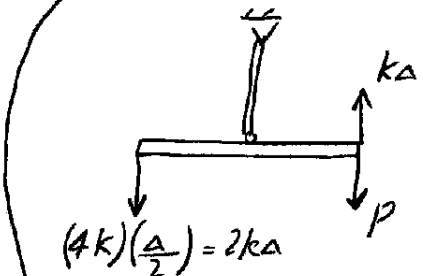


① سختی نسبی میله‌ها را کنار آنها می‌نویسیم و رفت شود که تنها نسبت سختی‌ها مهم است و سختی میله چپ 4 برابر سختی معادل میله راست است. ($k=\frac{EA}{2\ell}$) ← این k را در نهایت در جواب جایگذاری می‌کنیم

② برای یک نقطه دلخواه تلاقی مثل ۱ بار یک Δ فرض کرده و Δ نسبی نقاط دیگر را می‌نویسیم:



③ به جای میله‌ها نیروهای آنها را قرار می‌دهیم ($F=k\Delta$)

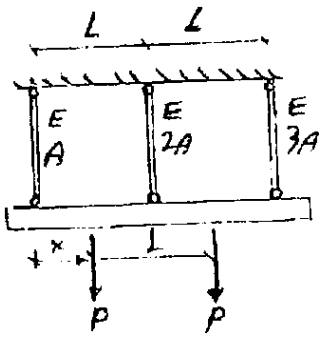


④ اگر روی آن را به حول نقطه دوران گشتاور می‌گیریم

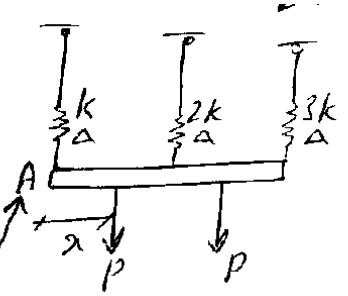
$$\sum M = P\times 2a - k\Delta\times 2a - 2k\Delta\times a = 0 \rightarrow \Delta = \frac{P}{2k} = \frac{PL}{EA}$$

آزاد ۹۰

۴۴- تیر صلبی توسط ۳ میله با طولهای یکسان مطابق شکل نگهداری شده است فاصله x را به گونه‌ای تعیین نمایید که تیر بر وضعیت افقی که از ابتدا قرار داشته باقی بماند. (x فاصله بار اول از میله اول و فاصله دو بار از هم L می‌باشد.)

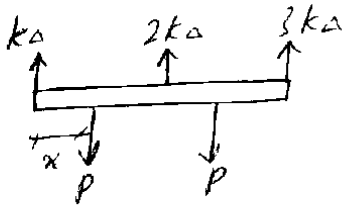


۱) $\frac{L}{2}$ ۲) L ۳) $\frac{5}{6}L$ ۴) $\frac{2}{3}L$



① نوشتن $k\Delta$ ها ی نسبی
② نوشتن Δ ها ی نسبی
← دقت شود که Δ ها برابرند چون گفته شده افقی است

③ جاگذاری نیروها



نوشتن روابط استاتیکی ←

$\sum F_y = 0 \rightarrow k\Delta + 2k\Delta + 3k\Delta = 2P$

$\rightarrow \boxed{k\Delta = \frac{P}{3}}$ (I)

$\sum M_A = 0 \rightarrow 2k\Delta \times L + 3k\Delta \times 2L = Px + P(L+x)$

یک نقطه دلخواه

$\rightarrow 8k\Delta = P(L+2x) \xrightarrow{(I)} \frac{8P}{3} = P(L+2x)$

$\rightarrow x = \frac{5L}{6}$

سراسری ۹۱- دکتری

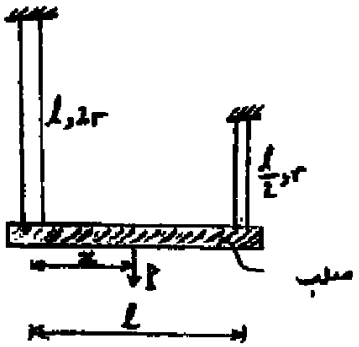
۶- **قطعه صلبی مطابق شکل به دو میله ارتجاعی هم جنس با مقطع دایره که طول و شعاع سطح مقطع آنها روی شکل نشان داده شده است جوش داده شده و در وضعیت افقی قرار دارد. فاصله x را به گونه‌ای به دست آورید که پس از اعمال نیروی P، قطعه صلب کماکان افقی باقی بماند؟**

۱) $\frac{l}{۴}$

۲) $\frac{l}{۳}$

۳) $\frac{l}{۲}$

۴) $\frac{۲l}{۳}$



سراسری ۸۹

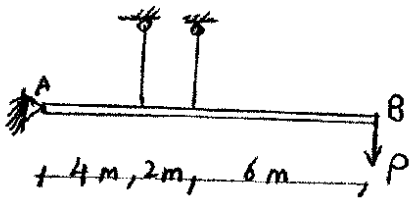
۵۳- مطابق شکل تیر صلب **AB** توسط دو میله که دارای سطح مقطع $۲۰\ cm^۲$ و تنش مجاز $۳۶kg/cm^۲$ می‌باشند، نگهداری شده و نیروی **P** به آن وارد می‌شود. مقدار بار مجاز **P** وارد بر سازه بر حسب **kg** چقدر است؟

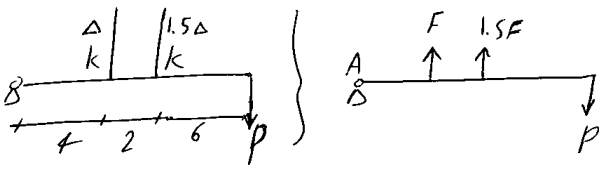
۱) ۲۵۰

۲) ۵۲۰

۳) ۸۷۰

۴) ۷۸۰





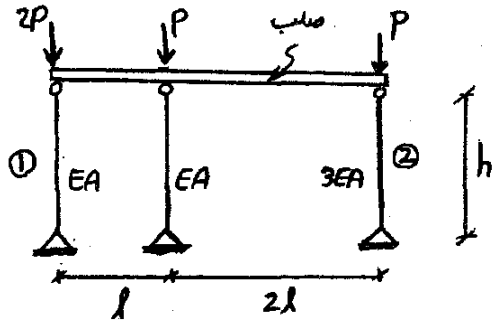
$\sum M_A = ۰ \rightarrow F \times ۴ + ۱.۵F \times ۶ = P \times ۱۲ \rightarrow F = \frac{۱۲P}{۱۳}$

نیروی میله سمت راستی بیشتر است (1.5F)

بنابراین اول سمت راستی خراب می‌شود

$\frac{\left[۱.۵F = \frac{۱۸P}{۱۳}\right]}{۲۰} < ۳۶ \rightarrow P < \frac{۳۶ \times ۲۰ \times ۱۳}{۱۸} = ۵۲۰$

آزاد ۹۲

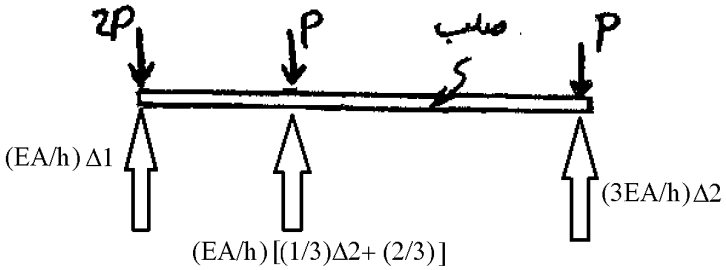


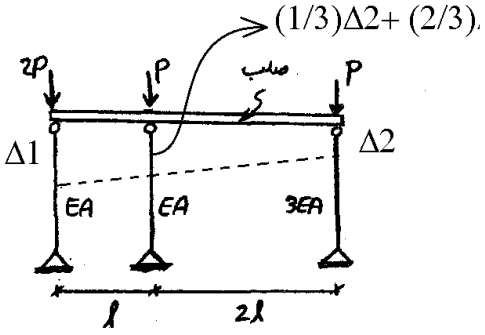
۴۲- نسبت تغییرمکان میله (۱) به (۲) کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) 6

۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

گزینه ۲:

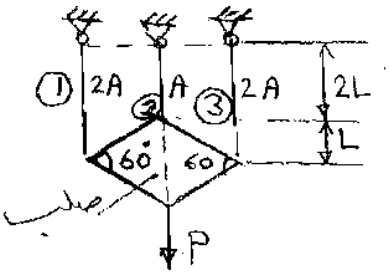




$$\sum M_{\text{حول میله وسط}} = 0 \;\rightarrow\; \left(\frac{EA}{h}\Delta_1 - 2P\right)l - \left(\frac{3EA}{h}\Delta_2 - P\right)(2l) = 0 \quad\rightarrow\quad \Delta_1 = 6\Delta_2$$

سراسری ۸۶

۴۴- جسم صلبی به شکل لوزی که از وزن آن صرفنظر می‌شود از سه رأس به سه میله آویزان شده که جنس آنها یکسان است. نیروی P به رأس چهارم لوزی آویزان است نیروی وارد به هر میله چقدر است؟



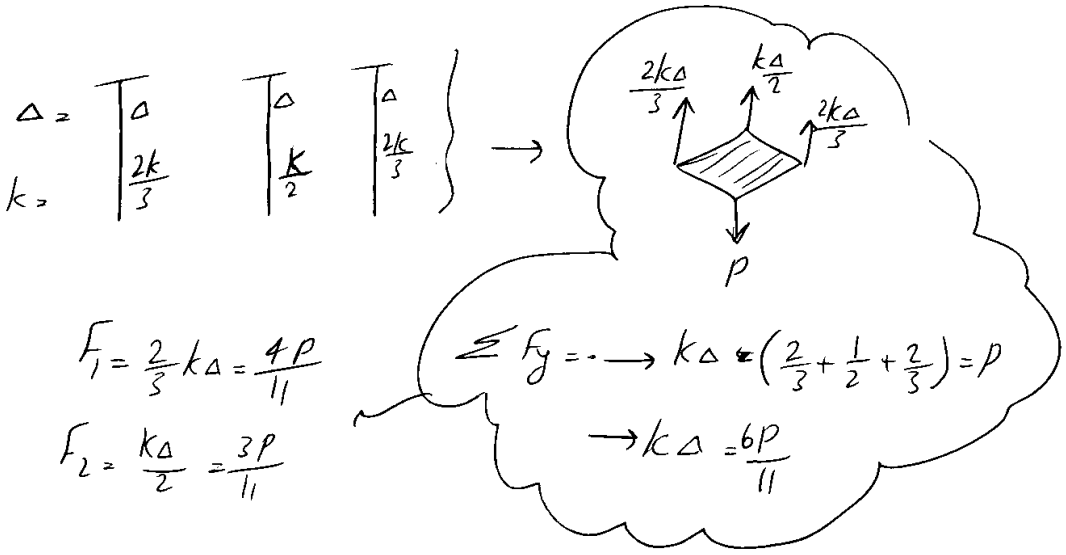
۱) $F_1 = F_2 = F_3 = \frac{P}{3}$

۲) $F_2 = P, F_1 = F_3 = 0$

۳) $F_1 = F_3 = \frac{P}{4}, F_2 = \frac{P}{2}$

۴) $F_1 = F_3 = \frac{4P}{11}, F_2 = \frac{3P}{11}$

هم سازه و هم بارگذاری متقارن است. بنابراین دلتا ها یکسان است.



سراسری ۸۶

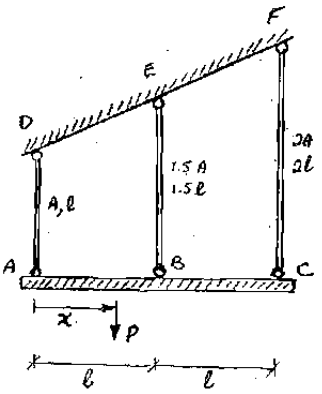
۴۵- تیر صلب ABC توسط ۳ میله مطابق شکل آویزان شده است. موقعیت بار P را بگونه‌ای تعیین نمائید، که تیر در وضعیت کاملاً افقی که از ابتدا قرار داشته است باقی بماند.

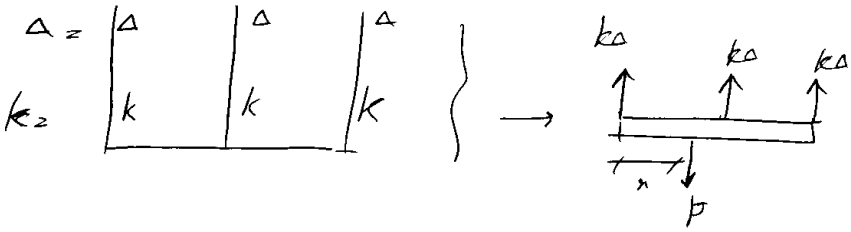
۱) $x = l$

۲) $x = \frac{l}{2}$

۳) $x = \frac{3l}{2}$

۴) $x = \frac{5l}{3}$





چون بارگ متقارنند برای اینکه تیر افقی باید وسط قرار گیرد پس x=l

سراسری ۸۸

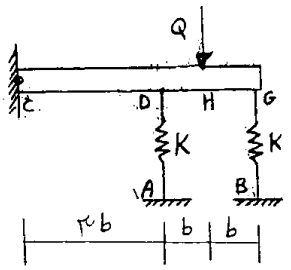
۵۲- در سازه شکل زیر نسبت Q به خیز H را حساب کنید. تیر CG صلب است.

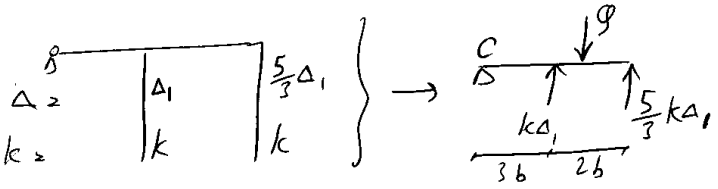
۱) $\frac{18}{8}K$

۲) $\frac{17}{8}K$

۳) $\frac{16}{8}K$

۴) $\frac{15}{8}K$





$\Sigma M_C = 0 \rightarrow k\Delta_1 \times 3b + \frac{5}{3}k\Delta_1 \times 5b = Q \times 4b$

$\Rightarrow \Delta_1 = \frac{6Q}{17k} \rightarrow \Delta_2 = \frac{10Q}{17k}$ $\quad \Delta_H = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} = \frac{8Q}{17k} \Rightarrow \frac{Q}{\Delta_H} = \frac{17k}{8}$

سراسری ۸۵

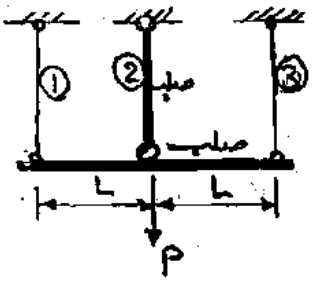
در شکل روبرو میله افقی و میله قائم وسطی صلب هستند. نیروی وارد به هرمیله قائم چقدر است؟

۱) $P_1 = P_2 = P_3 = \frac{P}{3}$

۲) $P_1 = P_2 = \frac{P}{4}$, $P_3 = \frac{P}{2}$

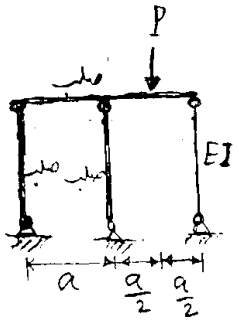
۳) $P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$, $P_3 = 0$

۴) $P_1 = P_3 = 0$, $P_2 = P$



سراسری ۸۸

۵۴- در شکل روبه‌رو میله افقی و دو میله‌ی سمت چپ صلب می‌باشند. میله‌ی سمت راست دارای طول L و سطح مقطع A و مدول ارتجاعی E می‌باشد. نیروی وارد بدان چقدر است؟



۱) صفر

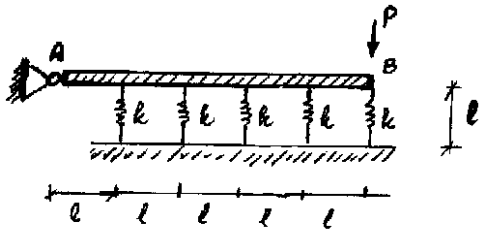
۲) $\frac{PL}{AE}$

۳) $\frac{PL}{۲AE}$

۴) $\frac{PL}{۳AE}$

سراسری ۹۱

۴۶- **در سازه شکل مقابل عضو AB صلب بوده و سختی فنرها برابر k می‌باشد. مقدار تغییر مکان نقطه B کدام است؟**

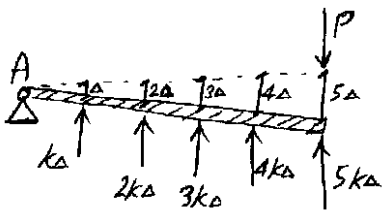


۱) $\frac{۲۵p}{۱۱k}$

۲) $\frac{۱۱p}{۵k}$

۳) $\frac{۱۱p}{۲۵k}$

۴) $\frac{۵p}{۱۱k}$



$$\circlearrowleft \sum M_A = 0 \longrightarrow 5PL - (5k\Delta)\times 5L - (4k\Delta)\times 4L - (3k\Delta)3L - (2k\Delta)\times 2L - (k\Delta)L = 0$$

$$\Delta = \frac{5P}{(25+16+9+4+1)k} = \frac{5P}{55k} = \frac{P}{11k} \longrightarrow \boxed{\Delta_B = 5\Delta = \frac{5P}{11k}}$$

تمرین سراسری ۸۵

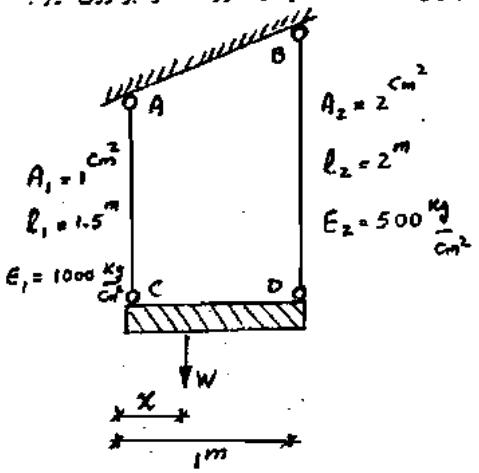
تیر صلب CD توسط دو میله AC و BD آویزان شده است. موقعیت وزنه W را بر روی تیر به گونه‌ای تعیین نمائید، که تیر در وضعیت افقی باقی بماند.

۱) $\frac{۱}{۲}$m

۲) $\frac{۳}{۵}$m

۳) $\frac{۱}{۳}$m

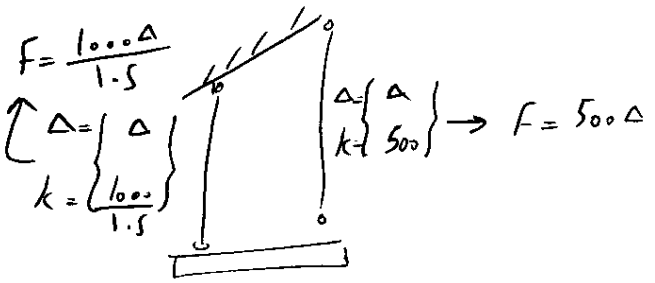
۴) $\frac{۳}{۷}$m

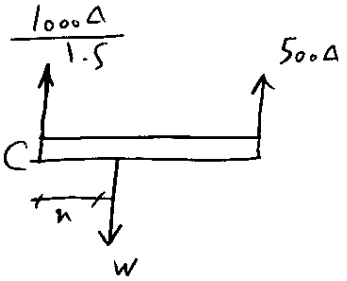


از آنجا که گفته تیر به صورت افقی باقی می ماند، تغییر طول هر دو میله با هم برابر خواهد بود (هر دو نقطه B و C تغییر مکان Δ خواهند داشت.

۱- سختی محوری میله ها برابر K=EA/L می باشد.

۲- نیروی میله AC برابر $F = K\Delta = \frac{1000\Delta}{1.5}$ و نیروی میله BD برابر $F = K\Delta = 500\Delta$ خواهد بود:





حال معادلات تعادل را می نویسیم:

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \rightarrow \frac{1750\Delta}{1.5} - W = 0 \rightarrow \Delta = \frac{1.5W}{1750} \\ \sum M_C = 0 \rightarrow 500\Delta \times L - W \times x = 0 \rightarrow \frac{500 \times 1.5W}{1750} = W \times x \end{cases} \rightarrow \boxed{x = \frac{3}{7}}$$

تمرین سراسری ۸۶

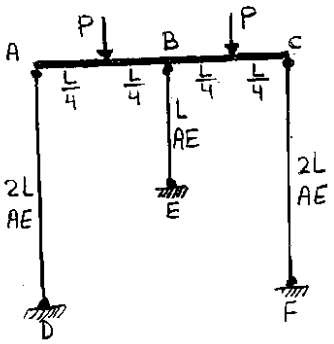
۴۸- نیرو در عضو BE کدام است؟ (قطعه ABC، صلب می‌باشد.)

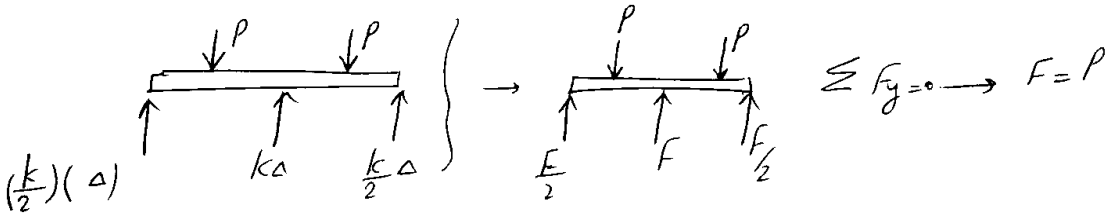
۱) P

۲) $\frac{P}{۲}$

۳) $\frac{۲P}{۳}$

۴) $\frac{۴P}{۱۰}$

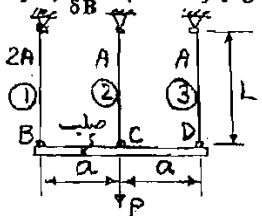


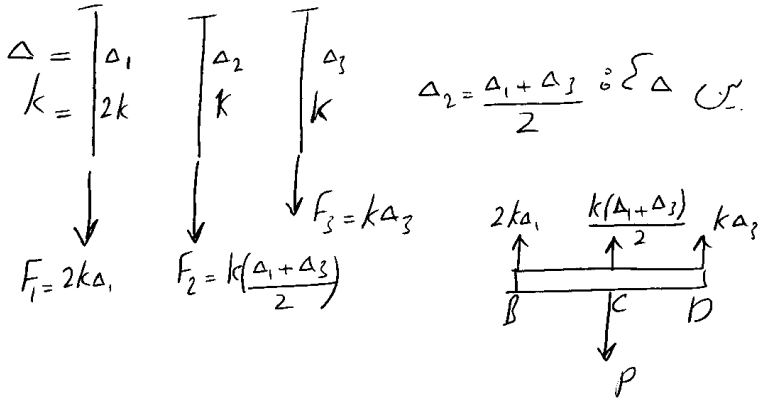


تمرین سراسری ۸۴

۴۲- در شکل روبرو طول و جنس هر سه میله یکسان ولی سطح مقطع میله (۱) دو برابر هر کدام از میله‌های دیگر است. نسبت $\frac{\delta D}{\delta B}$ چقدر است؟

۱) ۰٫۵
۲) ۱
۳) ۱٫۵
۴) ۲



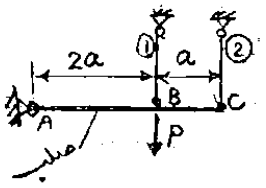


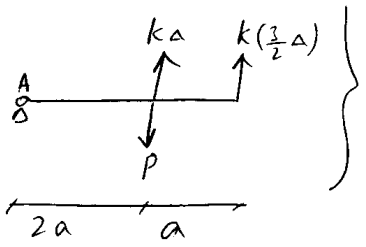
$$\sum F_y = 0 \rightarrow k(2.5\Delta_1 + 1.5\Delta_3) = P \qquad \sum M_C = 0 \rightarrow 2k\Delta_1 = k\Delta_3 \rightarrow \boxed{\frac{\Delta_3}{\Delta_1} = 2}$$

تمرین سراسری ۸۵

۴۷- در شکل روبرو دو میله از ۲ از یک جنس، با یک سطح مقطع و با یک طول می‌باشند. چه نسبتی بین نیروی وارد به این میله‌ها وجود دارد $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$؟

۱) ۱
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) ∞



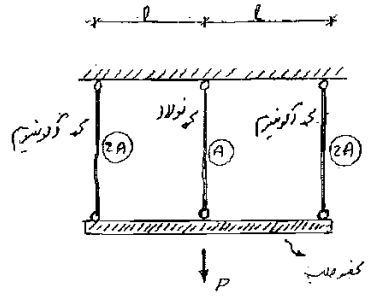


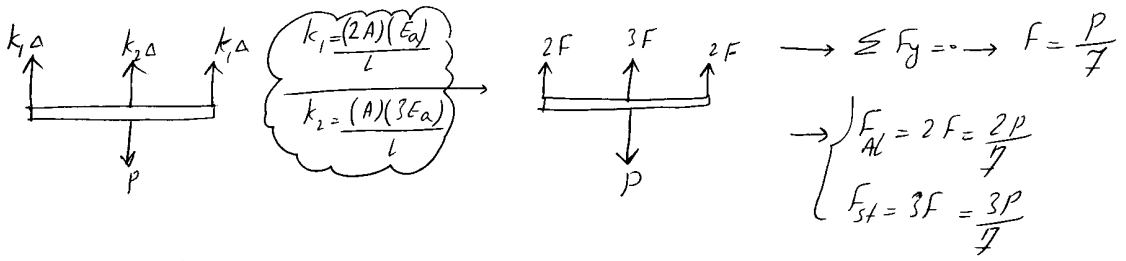
$$\rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{k\Delta}{\left(\frac{3}{2}k\Delta\right)} = \frac{2}{3}$$

تمرین سراسری ۸۶

۴۱- مطلوبست تعیین نیروهای داخلی در هر یک از اعضاء قائم شکل مقابل. کل سیستم تحت اثر نیروی P قرار گرفته است.
($E_s = 3E_a$ فولاد) (آلومینیم)

۱) $F_{Al} = \frac{2}{5}P$, $F_{St} = \frac{1}{5}P$
۲) $F_{Al} = \frac{1}{5}P$, $F_{St} = \frac{3}{5}P$
۳) $F_{Al} = \frac{3}{7}P$, $F_{St} = \frac{1}{7}P$
۴) $F_{Al} = \frac{2}{7}P$, $F_{St} = \frac{3}{7}P$

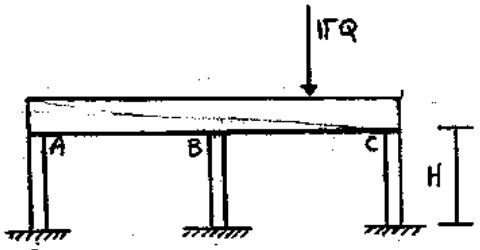




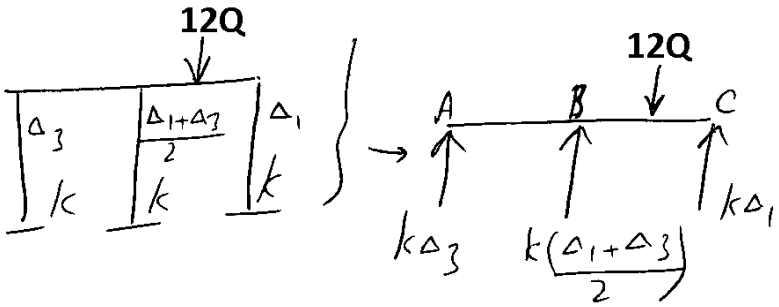
تمرین سراسری ۸۷

۵۶۰- تیر صلب ABC بر روی سه ستون کوتاه کشسان همانند قرار دارد. کدام نیروی محوری ستون صحیح است؟

۱) $N_A = 2Q$
۲) $N_A = 3Q$
۳) $N_C = 6Q$
۴) $N_C = 7Q$



گزینه ۴ صحیح است.



$$\left.\begin{aligned}\sum F_y = 0 \rightarrow K(1.5\Delta_1 + 1.5\Delta_3) = 12Q\\ \sum M_B = 0 \rightarrow K\Delta_3 L + 12Q\frac{L}{2} = K\Delta_1 L\end{aligned}\right\}$$

دو معادله دو مجهولی بالا را حل می کنیم :

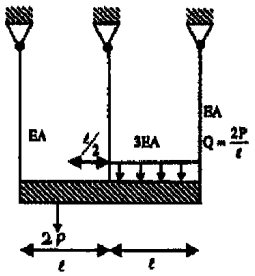
$$\rightarrow \begin{cases}\Delta_1 + \Delta_3 = \frac{8Q}{K}\\ \Delta_1 - \Delta_3 = \frac{6Q}{K}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\Delta_1 = \frac{7Q}{K}\\ \Delta_3 = \frac{Q}{K}\end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases}N_C = K\Delta_1 = 7Q\\ N_A = K\Delta_3 = Q\end{cases}$$

تمرین: آزاد ۹۳

۴۱ـ قطعه صلب AC به سه میله متصل شده است. نیرو در میله وسط کدام است؟

۱) $\frac{12}{5}P$
۲) $\frac{5}{12}P$
۳) $\frac{6}{5}P$
۴) $\frac{5}{6}P$

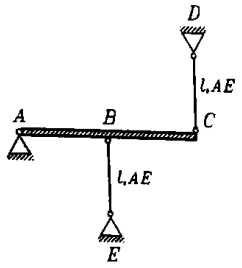


گزینه ۱

۳-۱-خطای ساخت

مثال

در سازه زیر که به علت خطای ساخت، عضو CD به اندازه $\Delta_.$ کوتاهتر ساخته شده است، نیروی کششی ایجاد شده در این عضو پس از نصب سازه چقدر است؟ $(AB = BC = l)$



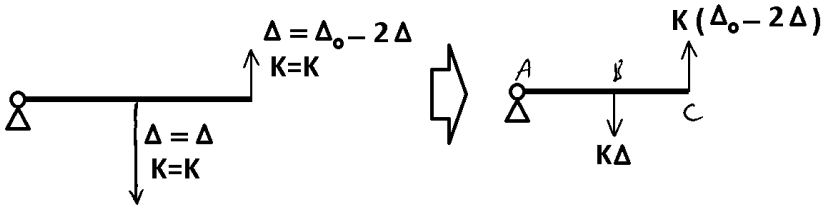
۱) $\frac{AE\Delta_.}{5l}$

۲) $\frac{2AE\Delta_.}{5l}$

۳) $\frac{3AE\Delta_.}{5l}$

۴) $\frac{4AE\Delta_.}{5l}$

نحوه حل مسائل با خطای ساخت:



$$\sum M_A = 0$$

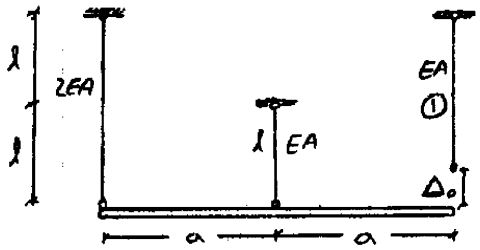
$$\rightarrow K\Delta = 2K(\Delta_0 - 2\Delta) \rightarrow \Delta = \frac{2\Delta_0}{5}$$

$$F_{CD} = K(\Delta_0 - 2\Delta) = \frac{K\Delta_0}{5}$$

$$\rightarrow F_{CD} = \frac{EA\Delta_0}{5L}$$

آزاد ۹۱

۴۵- میله ۱ به اندازه Δ_0 کوتاه‌تر ساخته شده است بعد از اتصال این میله به عضو صلب نیروی ایجاد شده در میله ۱ کدام است؟

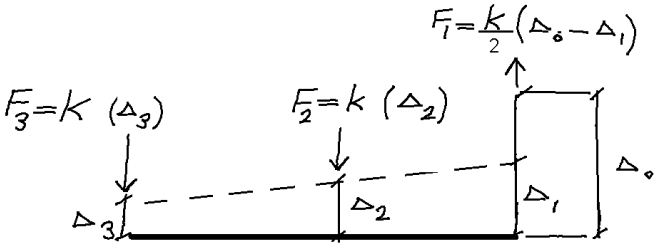


۱) صفر

۲) $\frac{1}{3}\frac{EA}{\ell}\Delta_0$

۳) $\frac{1}{7}\frac{EA}{\ell}\Delta_0$

۴) $\frac{1}{10}\frac{EA}{\ell}\Delta_0$



بنابراین تنها دو مجهول داریم. حال با استفاده از دو معادله تعادل $(\sum M = 0 , \sum F_y = 0)$ مقادیر $\Delta 1$، و $\Delta 3$ را بدست می آوریم:

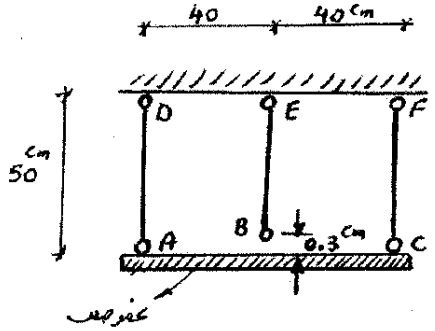
$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{K}{2} \times (\Delta_0 - \Delta_1) - K \times \left(\frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2}\right) - K \times \Delta_3 = 0 \quad \rightarrow \quad -\Delta_1 - \frac{3}{2}\Delta_3 + \frac{1}{2}\Delta_0 = 0$$

$$\sum M = 0 \rightarrow \left[\frac{K}{2} \times (\Delta_0 - \Delta_1)\right] \times a + [K \times \Delta_3] \times a = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}\Delta_1 + \Delta_3 + \frac{1}{2}\Delta_0 = 0$$

$$\rightarrow \Delta_1 = \frac{5}{7}\Delta_0 \rightarrow F_1 = \left[\frac{EA}{2L} \times (\Delta_0 - \Delta_1)\right] = \frac{EA}{7L}\Delta_0$$

سراسری ۸۹

۵۰- در سازه شکل مقابل برای اتصال سه میله عمودی به صفحه صلب، نقطه B به اندازه $۰/۳^{cm}$ کوتاه می‌باشد. در صورتی که عضو BE تحت کشش به صفحه صلب متصل شود، نیروی داخلی هر یک از اعضاء را بر حسب kg بدست آورید. سطح مقطع و مدول ارتجاعی هر سه میله عمودی به ترتیب برابر $۵cm^۲$، $۴\times۱۰^۵ \frac{kg}{cm^۲}$ می‌باشد.

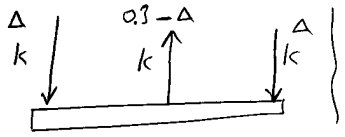


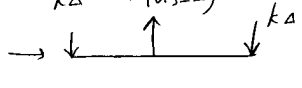
۱) $F_{AD} = F_{CF} = ۲۰۰۰ , F_{BE} = ۴۰۰۰$

۲) $F_{AD} = F_{CF} = ۴۰۰۰ , F_{BE} = ۸۰۰۰$

۳) $F_{AD} = F_{CF} = ۸۰۰۰ , F_{BE} = ۱۶۰۰۰$

۴) $F_{AD} = F_{CF} = ۱۰۰۰ , F_{BE} = ۲۰۰۰$





$\sum F_y = ۰ \rightarrow ۲k\Delta = k(۰.۳ - \Delta) \rightarrow \boxed{\Delta = ۰.۱}$

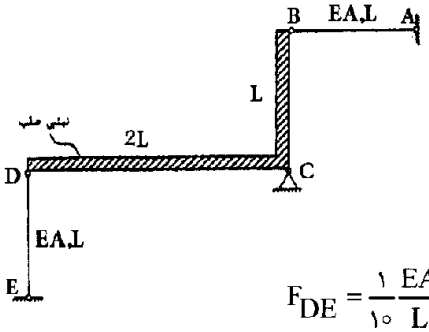
$\rightarrow F_{AD} = F_{FC} = k\Delta = \frac{EA}{L} \times ۰.۱$

$= \frac{۴\times۱۰^۵ \times ۵}{۵۰} \times ۰.۱ = ۴۰۰۰$

$F_{BE} = k(۰.۳ - \Delta) = \frac{۴\times۱۰^۵ \times ۵}{۵۰} \times (۰.۳ - ۰.۱) = ۸۰۰۰$

سراسری ۹۳

۵۰- میله AB بر اثر خطای ساخت به اندازهٔ $\delta_۰$ کوتاه ساخته شده است. چنانچه گره B در جای خود بر روی نبشی صلب مطابق شکل مستقر گردد، نیروی محوری اعضای AB و DE چه مقدار می‌باشد؟ (جنس و طول دو میله یکسان است)



۱) $F_{DE} = \frac{۱}{۱۰}\frac{EA}{L}\delta_۰ , F_{AB} = \frac{۱}{۵}\frac{EA}{L}\delta_۰$

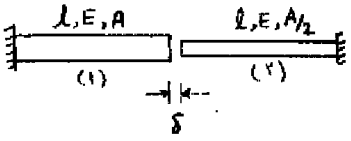
۲) $F_{DE} = \frac{۱}{۵}\frac{EA}{L}\delta_۰ , F_{AB} = \frac{۲}{۵}\frac{EA}{L}\delta_۰$

۳) $F_{DE} = \frac{۴}{۵}\frac{EA}{L}\delta_۰ , F_{AB} = \frac{۸}{۵}\frac{EA}{L}\delta_۰$

۴) $F_{DE} = \frac{۲}{۵}\frac{EA}{L}\delta_۰ , F_{AB} = \frac{۴}{۵}\frac{EA}{L}\delta_۰$

سراسری ۹۲-دکتری

۱- **میله‌های هم محور نشان داده شده در شکل زیر مفروض است. اگر انتهای آزاد آنها را که به میزان δ از هم فاصله دارند به یکدیگر متصل نماییم، نیروی محوری ایجاد شده در میله (۲) چقدر است؟**



۱) $\frac{EA\delta}{3\ell}$

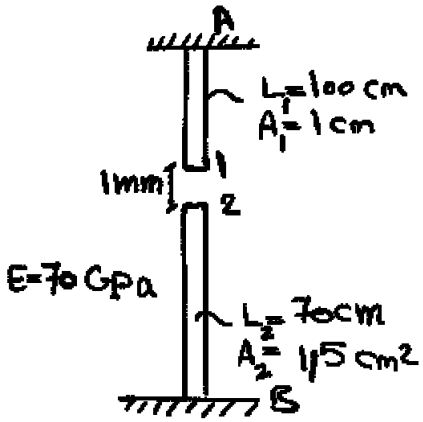
۲) $\frac{EA\delta}{2\ell}$

۳) $\frac{EA\delta}{\ell}$

۴) $\frac{2EA\delta}{3\ell}$

سراسری ۹۳- دکتری

۸- **اگر نقطه‌ی شمارهٔ یک کشیده شود به طوری که اتصال یک و دو به صورت مفصلی باشند، عکس‌العمل تکیه‌گاهی در نقطهٔ A برحسب N چقدر است؟**



۱) ۴۷۷۲/۷

۲) ۳۸۰۰

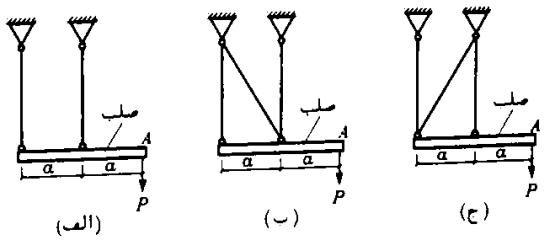
۳) ۲۳۷۱/۷

۴) ۵۸۰۰

سراسری ۸۰

سوال: چرا در مثالهای قبل از $\Sigma Fx=0$ استفاده نکردیم؟ آیا میله های صلب در جهت افقی پایدارند؟

در سه شکل زیر، میله‌ها همه از یک جنس و با یک سطح مقطع می‌باشند. کدام عبارت در مورد تغییرمکان نقطه A زیر اثر بار P، صادق است؟



۱) در هر سه شکل نقطهٔ A فقط به طرف پایین تغییرمکان می‌دهد.

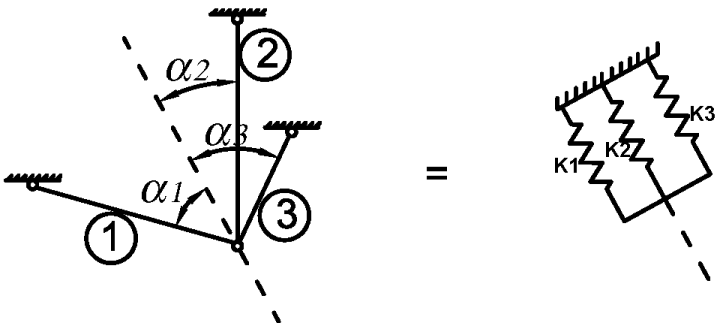
۲) در شکل الف نقطهٔ A تغییرمکان افقی ندارد و تغییر مکانهای افقی نقطهٔ A در دو شکل دیگر مخالف همدیگر است.

۳) در شکل الف نقطهٔ A فقط تغییرمکان بطرف پایین دارد و در دو شکل دیگر نقطه A به‌طرف پایین و به‌طرف چپ حرکت می‌کند.

۴) در شکل الف نقطه A تغییرمکان افقی دارد و در دو شکل دیگر که میله مایل وجود دارد و مانند بادبند عمل می‌کند نقطه A تغییرمکان افقی ندارد.

پاسخ: گزینه ۳

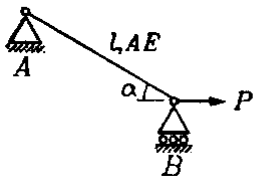
۳-۲-تغییرشکل محوری میله های مایل



$$K1=\frac{E1A1}{L1}(\cos\alpha_1)^2$$

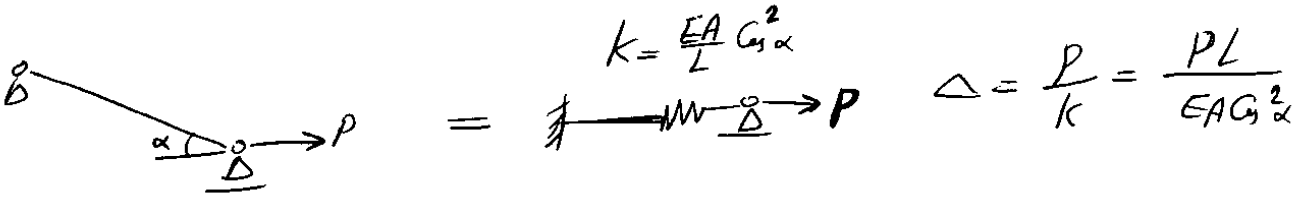
مثال

در سازه داده شده تغییرمکان تکیه‌گاه B چقدر است؟



۱) $\frac{Pl\cos\alpha}{AE}$ ۲) $\frac{Pl\cos^2\alpha}{AE}$

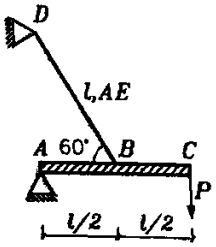
۳) $\frac{Pl}{AE\cos\alpha}$ ۴) $\frac{Pl}{AE\cos^2\alpha}$



مثال

در سازه زیر که میله صلب ABC توسط کابل BD مهار شده‌است

تغییرمکان C چقدر است؟

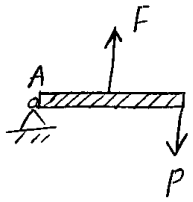


۱) $\frac{8\sqrt{3}Pl}{3AE}$

۲) $\frac{8Pl}{3AE}$

۳) $\frac{4Pl}{AE}$

۴) $\frac{16Pl}{3AE}$ ✓

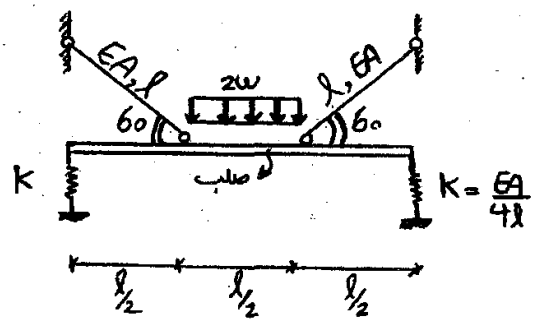


$$\sum M_A = 0 \rightarrow F = 2P \qquad F = k\Delta_B \rightarrow 2P = \frac{EA}{l} \times \cos^2 30 \times \Delta_B$$

$$2P = \frac{3EA}{4l} \times \Delta_B \rightarrow \boxed{\Delta_B = \frac{8PL}{3EA}} \Rightarrow \Delta_C = 2\Delta_B = \frac{16PL}{3EA}$$

آزاد ۹۲

۴۳- در سازه متقارن نشان داده شده نیروی فنر کدام است؟ (سختی فنرها $K = \frac{EA}{4\ell}$ می‌باشد)



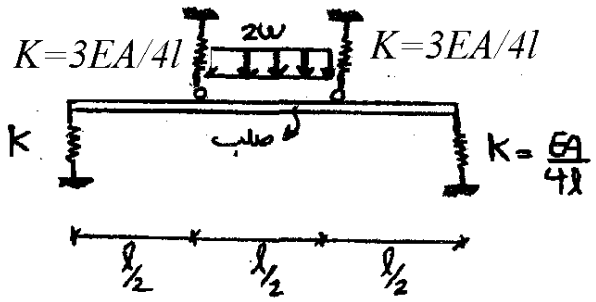
۱) $\frac{\omega\ell}{4}$

۲) $\frac{\omega\ell}{8}$

۳) $\frac{\omega\ell}{12}$

۴) $\frac{\omega\ell}{16}$

گزینه ۲ با توجه به تقارن، حرکت میله صلب افقی خواهد بود و بار به نسبت سختی بین تمامی اعضا تقسیم می شود:

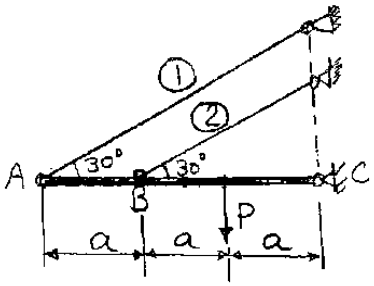


$$F_{\text{فنر}} = \frac{\frac{EA}{4l}}{\frac{EA}{4l} + \frac{EA}{4l} + \frac{3EA}{4l} + \frac{3EA}{4l}} \times \left(2w \times \frac{l}{2}\right) = \frac{wl}{8}$$

سراسری ۸۶

۴۳- اگر نیروهای داخلی میله‌های ۱ و ۲ به ترتیب F_1 و F_2 باشد نسبت $\frac{F_1}{F_2}$ چقدر است؟

۱) ۰/۵
۲) ۰/۶۶۷
۳) ۱
۴) ۱/۵

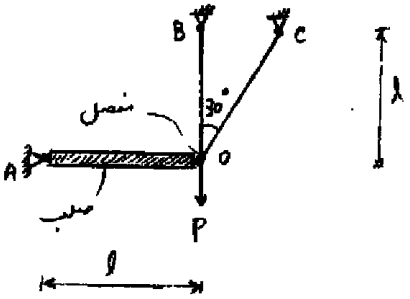


گزینه ۳:

سراسری ۹۱- دکتری

۴- در سازه شکل مقابل نسبت نیروی میله BO به نیروی میله CO چقدر است؟ میله‌های BO و CO از یک جنس و دارای سطح مقطع یکسانند.

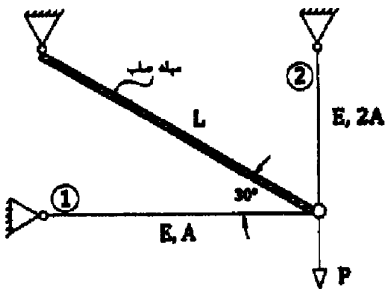
۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) ۲
۴) ۴



سراسری ۹۳

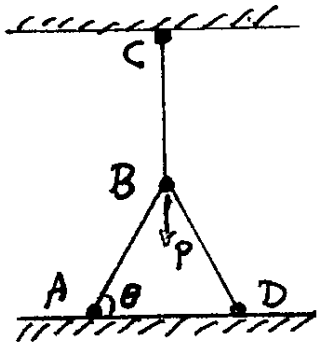
۴۶- نسبت نیرو در میله ۱ به میله ۲ کدام است؟ $(\frac{F_1}{F_2})$

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$
۳) $\frac{۱}{۶}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$



سراسری ۹۲

۵۵- سازه‌ای متشکل از سه میله مطابق شکل زیر، تحت بار قائم P قرارگرفته است. میله‌های AB ، BD مشابه و دارای طـول ℓ و سطح مقطع A_1 هستند. میلهٔ قائم BC دارای طول ℓ و سطح مقطع A_2 می‌باشد. همهٔ میله‌ها از یک جـنس (E) بـوده و در نقاط A، B، C و D دارای اتصال مفصلی هستند. نیروی محوری میلهٔ قائم BC ، برابر کدام است؟



۱) $\frac{P}{2\sin^2\theta+1}$

۲) $\frac{P\left(\frac{A_2}{A_1}\right)}{2\left(\frac{A_2}{A_1}\right)\sin^2\theta+1}$

۳) $\frac{P\left(\frac{A_1}{A_2}\right)}{2\sin^2\theta+\left(\frac{A_1}{A_2}\right)}$

۴) $\frac{P\left(\frac{A_2}{A_1}\right)}{2\sin^2\theta+\left(\frac{A_2}{A_1}\right)}$

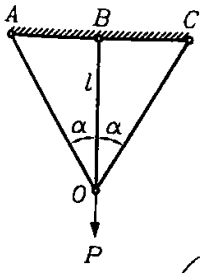
گزینه۴:

بار P به نسبت سختی بین میله ها تقسیم می شود:

$$\left.\begin{matrix} K_{AB}=K_{BD}=\frac{EA_1}{L}Sin_\theta^2 \\ K_{BC}=\frac{EA_2}{L}\end{matrix}\right\}\rightarrow P_{BC}=\frac{\frac{EA_2}{L}}{2\times\frac{EA_1}{L}Sin_\theta^2+\frac{EA_2}{L}}P=\frac{\frac{A_2}{A_1}}{2\times Sin_\theta^2+\frac{A_2}{A_1}}P$$

مثال

در خرپای زیر نیروی میله وسط چقدر است؟ $(AE=const)$



۱) $\frac{P}{1+2\cos\alpha}$

۲) $\frac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha}$

۳) $\frac{P}{1+2\cos^2\alpha}$ ✓

۴) $\frac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos^2\alpha}$

در تست قبل نیروی میله‌های کناری چقدر است؟

۱) $\frac{P}{1+2\cos\alpha}$

۲) $\frac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha}$

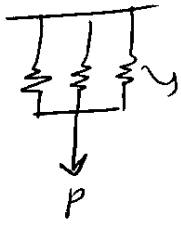
۳) $\frac{P}{1+2\cos^2\alpha}$

۴) $\frac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos^2\alpha}$ ✓

سراسری ۸۸

۵۵- دستگاهی توسط سه رشته سیم متشابه به طول هر یک l توسط قلاب مشترکی از سقف آویزان است. امتداد هر سیم با سقف زاویه ۴۵° ساخته و تصاویر سه سیم بر روی سقف زاویای ۱۲۰ با یکدیگر دارند. سطح مقطع سیم برابر A و مدول ارتجاعی آن E است. اگر وزن دستگاه W باشد، جابه‌جایی قائم قلاب (محل تقارب سه سیم) چقدر است؟ (سه رشته سیم هرمی ساخته‌اند که قاعده آن مثلث متساوی‌الاضلاع در تراز سقف می‌باشد و بار به رأس آن وارد می‌شود.)

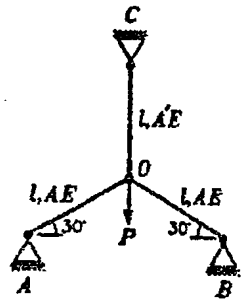
۱) $\frac{۲}{\sqrt{۲}}\frac{Pl}{EA}$ ۲) $\frac{۲}{۳}\frac{Pl}{EA}$ ✓ ۳) $\sqrt{۲}\frac{Pl}{EA}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\frac{Pl}{EA}$



$k = \frac{EA}{L} \times C_{45^\circ}^{2} = \frac{EA}{2L} \Rightarrow \Delta = \frac{P}{\sum k} = \frac{P}{\frac{3EA}{2L}} = \frac{2PL}{3EA}$

آزاد ۸۹

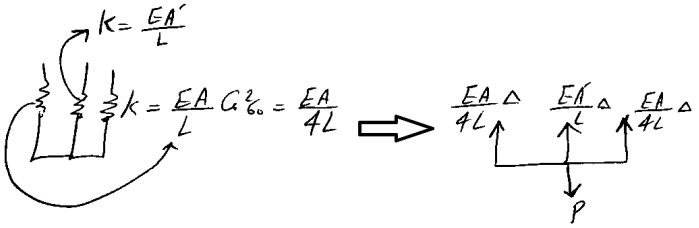
۴۷- در خرپای زیر اگر نیروی میله‌ها مساوی باشند نسبت $\frac{A'}{A}$ چقدر است؟



۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

نیروی میله ها را محاسبه کرده و سپس برابر هم قرار می دهیم:



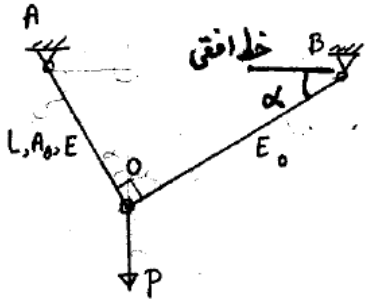
$F_{AO} = \frac{EA\Delta}{4L} \times \frac{1}{C_{60^\circ}} = \frac{EA\Delta}{2L}$

$F_{OC} = \frac{EA'}{L}\Delta$

$\rightarrow F_{AO} = F_{OC} \Rightarrow \frac{EA\Delta}{2L} = \frac{EA'}{L}\Delta \rightarrow \boxed{\frac{A'}{A} = \frac{1}{2}}$

سراسری ۸۷

۵۲- در سازه نشان داده شده در شکل زیر، سطح مقطع میله OB را تعیین نمائید بصورتیکه تحت اثر بار قائم P مفصل O تغییر مکان افقی ندهد.



۱) $A_0 \frac{E}{E_0} \cot g\alpha$

۲) $A_0 \tan\alpha$

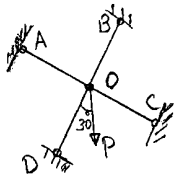
۳) $A_0 \cot g\alpha$

۴) $A_0 \frac{E}{E_0} \tan\alpha$

گزینه ۱:

سراسری ۸۸

۵۳- چهار میله هم صفحه OA، OB، OC و OD هر کدام به طول L، سطح مقطع A و مدول الاستسیته E و در O به هم مفصل شده‌اند. زاویه‌های تشکیل شده در O قائمه‌اند. تغییر مکان O برابر است با:



۱) O فقط در امتداد قائم به مقدار $\frac{PL}{2AE}$ حرکت می‌کند.

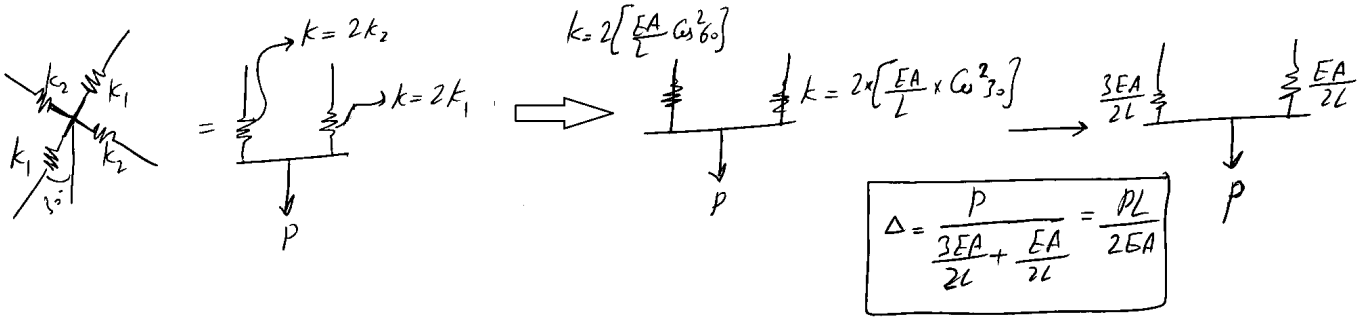
۲) O فقط در امتداد قائم به اندازه‌ی $\frac{PL}{AE}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ حرکت می‌کند.

۳) O در امتداد قائم به مقدار $\frac{PL}{2AE}$ و در امتداد افقی به مقدار $\frac{PL}{4AE}$ حرکت می‌کند.

۴) O در امتداد قائم به اندازه $\frac{PL}{AE}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و در امتداد افقی به مقدار $\frac{PL}{AE\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ حرکت می‌کند.

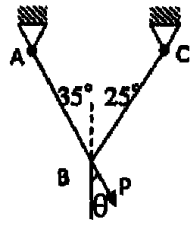
به ظاهر نیروی وارده در راستای قائم است ولی از کجا می توان مطمئن شد که تغییرمکان افقی صفر است یا نه؟

تغییرمکان قائم چقدر است؟



آزاد ۹۳

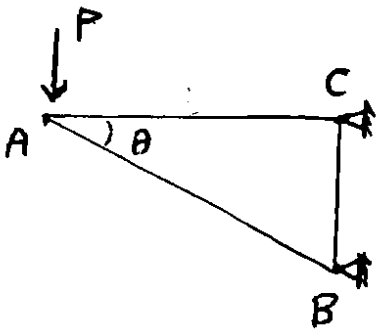
۴۵ـ در شکل مقابل دو کابل AB و BC با سطح مقطع و تنش مجاز یکسان تحت نیروی P واقع شده‌اند. زاویه اعمال نیروی P چقدر باشد تا طرح انتقادی باشد؟



۱) 10 درجه ۲) 5 درجه

۳) صفر ۴) 35 درجه

۵۳- در خرپای زیر، چنانچه طول عضو AC برابر L باشد، جهت مینیمم شدن حجم میلهٔ AB، زاویه θ چند درجه باید باشد؟



۱) $\frac{\pi}{3}$

۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{2}$

۴) $\frac{1}{4}\sqrt{\pi}$

با کاهش مقدار θ طول میله AB کاهش می یابد (و حجم "اولیه" آن کاهش می یابد). از طرفی با کاهش θ نیروی محوری (فشاری) عضو AB افزایش یافته و کاهش حجم آن در اثر بار P بیشتر خواهد بود. بنابراین کمترین زاویه پاسخ می باشد (گزینه ۴).

کمترین زاویه برای θ صفر می باشد که در این حالت سازه ناپایدار می شود. با نزدیک شدن θ به زاویه صفر، نیروی فشاری میله AB به بینهایت میل کرده و کمترین حجم را خواهد داشت. با توجه به اینکه مقاطع دارای ظرفیت فشاری محدودی می باشند، میله AB نمی تواند نیروی بینهایت تحمل کند. بنابراین اگر فرض کنیم تنش مجاز میله برابر σ_a می باشد، با توجه به اینکه نیروی وارد بر میله AB برابر $P/Sin\theta$ می باشد، مساحت مقطع لازم برای میله مایل بر اساس بار وارده بدست می آید:

$$\frac{\left(\frac{P}{\sin\theta}\right)}{A_{AB}} = \sigma_a \rightarrow A_{AB} = \frac{P}{\sigma_a \sin\theta}$$

وبنابراین حجم میله برابر خواهد بود با:

$$V = A_{AB} \times L_{AB} = \frac{P}{\sigma_a \sin\theta} \times \frac{L}{\cos\theta} = \frac{PL}{\sigma_a \sin\theta\cos\theta} = \frac{2PL}{\sigma_a \sin 2\theta}$$

در رابطه فوق از کاهش حجم میله در اثر نیروی فشاری وارد بر آن صرف نظر شده است. در این حالت برای حداقل شدن حجم میله باید $\theta = \frac{\pi}{4}$ باشد (گزینه ۲).

نحوه محاسبه تغییر طول وقتی مشخصات مقطع یا بارگذاری در طول عضو ثابت نیست:

سراسری ۸۷

۵۲- تغییر طول میله‌ای بطول L و به مدول ارتجاعی E زیر اثر نیروی محوری کششی F چقدر است؟(مساحت مقطع میله متغیر است در یک طرف میله A_0 و در طرف دیگر $2A_0$ است و تغییرات مساحت در طول میله خطی است.)

۱) $\frac{FL}{2A_0E}$ ۲) $\frac{FL}{A_0E}\text{Ln}2$ ۳) $\frac{2FL}{3A_0E}$ ۴) $\frac{FL}{A_0E}\text{Ln}3$

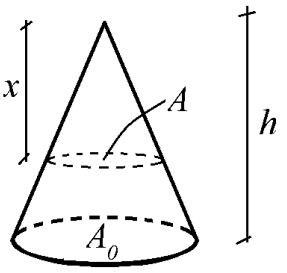
$$\Delta = \int_0^L \frac{P\,dx}{EA} = \frac{P}{E}\int_0^L \frac{dx}{(A_0+\frac{x}{L}A_0)} = \frac{PL}{EA_0}\int_0^L \frac{dx}{L+x}$$

$$= \frac{PL}{EA_0}\left[Ln(L+x)\right]_0^L = \frac{PL}{EA_0}\left[Ln(2L)-Ln(L)\right] = \frac{PL}{EA_0}Ln2$$

سراسری ۸۹

۴۹- تغییر مکان محوری رأس مخروطی توپر به ارتفاع h و شعاع قاعده R، وزن مخصوص γ و مدول الاستیسیته E را تحت وزن مخروط به دست آورید.

۱) $\frac{\gamma Rh}{6E}$ ۲) $\frac{\gamma h^2}{3E}$ ۳) $\frac{\gamma Rh}{3E}$ ۴) $\frac{\gamma h^2}{6E}$

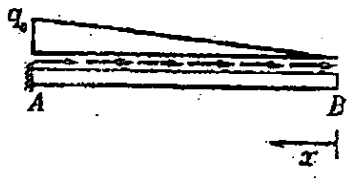


$$\left.\begin{aligned} P_{\text{المان}} &= \gamma\frac{Ax}{3} \\ \delta_{\text{المان}} &= \frac{P_{\text{المان}}dx}{EA}\end{aligned}\right\}\Delta = \int\frac{Pdx}{EA} = \int\frac{\gamma\frac{Ax}{3}dx}{EA}$$

$$\Delta = \int\frac{\gamma x}{3E}dx = \frac{\gamma h^2}{6E}$$

آزاد ۸۹

۴۲- در تیر زیر که تحت اثر بار گسترده طولی $q(x)=q_0\frac{x}{l}$ می‌باشد تغییر طول تیر چقدر است؟

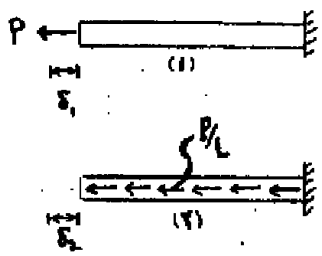


۱) $\frac{q_0l^2}{8AE}$ ۲) $\frac{q_0l^2}{2AE}$ ۳) $\frac{q_0l^2}{3AE}$ ۴) $\frac{q_0l^2}{6AE}$

$$\left.\begin{aligned} P_{\text{المان}} &= q_0\frac{x^2}{2l} \\ \delta_{\text{المان}} &= \frac{P_{\text{المان}}dx}{EA}\end{aligned}\right\}\Delta = \int\frac{Pdx}{EA} = \int\frac{q_0\frac{x^2}{2l}dx}{EA} = \frac{q_0l^2}{6EA}$$

سراسری ۹۲- دکتری

۷- میله‌ای به طول L، مدول ارتجاعی E و سطح مقطع A در حالت (۱) تحت بار محوری متمرکز P در انتهای آزاد و در حالت (۲) تحت بار محوری گسترده به شدت $\frac{P}{L}$ قرار دارد. نسبت تغییر مکان محوری انتهای میله در حالت (۲) به حالت (۱) کدام است؟ $(\frac{\delta_2}{\delta_1} = ?)$



۱) $\frac{1}{4}$

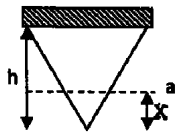
۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) ۱

تمرین: آزاد ۹۳

۴۴- مخروطی به ارتفاع h مطابق شکل به یک سطح افقی متصل است. تنش در مقطع a-a به فاصله x از رأس مخروط را به دست آورید. (وزن مخصوص مخروط = γ)



۱) $\delta = \gamma x$

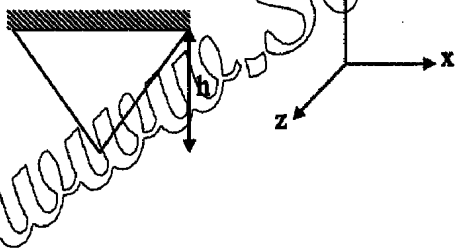
۲) $\delta = \frac{\gamma x}{A}$

۳) $\delta = \frac{1}{3}\gamma x$

۴) $\delta = \frac{\gamma x}{8A}$

تمرین: آزاد ۹۳

۴۷- مخروطی مطابق شکل تحت وزن خودش آویزان می‌باشد. تغییر حجم مخروط را به دست آورید؟ (وزن مخصوص مخروط = γ)



۱) $\frac{1-2h}{E} \times 6y$

۲) $\frac{8\pi h^3 d^2 (1-2\gamma)}{48E}$

۳) $\frac{8\pi d^2 h^2 (1-2\gamma)}{12E}$

۴) $\frac{8\pi h^2 d^2 (1-2\gamma)}{48E}$

www.Sarv.ir

آزاد۸۹

۴۳- میله‌ای با سطح مقطع متغیر در انتهای آزاد آن تحت اثر نیروی کششی محوری قرار می‌گیرد؛ بطوریکه جابجایی هر نقطه از آن بصورت $\Delta(x) = kx^3$ می‌باشد که x فاصله از تکیه‌گاه است. اگر جابجایی انتهای میله برابر Δ_0 باشد معادله کرنش میله کدام است؟ (طول میله l می‌باشد)

۱) $\frac{3\Delta_0}{l^3}x^2$ ۲) $\frac{6\Delta_0}{l^2}x$

۳) $\frac{\Delta_0}{l^4}x^3$ ۴) $\frac{\Delta_0}{4l^5}x^4$

ابتدا باید ضریب k را بیابیم. از آنجا که تغییرمکان انتهای میله را داده است، در انتهای میله x برابر l است:

$$kl^3 = \Delta_0 \rightarrow\rightarrow k = \frac{\Delta_0}{l^3}$$

بنابراین معادله تغییرمکان به صورت زیر خواهد بود:

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{l^3}x^3$$

حال می توان معادله کرنش را بدست آورد:

$$\Delta = \int \varepsilon\, dx \rightarrow\rightarrow \varepsilon = \frac{d\Delta}{dx} = 3\frac{\Delta_0}{l^3}x^2$$

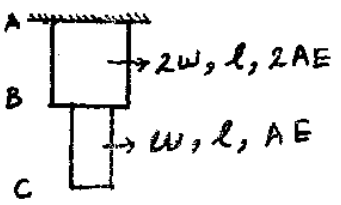
آزاد ۸۶

۴۱- تغییر مکان انتهای یک میله استوانه ای به وزن W و طول l که از تکیه گاه خود آویزان است چقدر است؟ (AE = const)

۱) $\frac{Wl}{2AE}$ ۲) $\frac{Wl}{3AE}$ ۳) $\frac{Wl}{4AE}$ ۴) $\frac{Wl}{AE}$

آزاد ۸۴

۲۱- در میله مقابل تغییر مکان C چقدر است؟

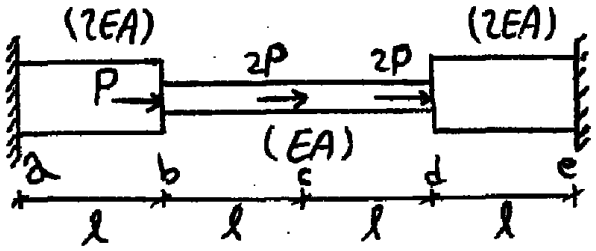


۱) $\frac{3Wl}{2AE}$
۲) $\frac{Wl}{2AE}$
۳) $\frac{3Wl}{4AE}$
۴) $\frac{Wl}{AE}$

۴-تغییر شکل محوری سازه های نامعین

سازگاری تغییرشکل:

آزاد ۹۲



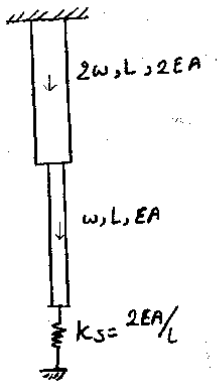
۴۱- نسبت عکس‌العمل محوری تکیه‌گاه a به عکس‌العمل محوری تکیه‌گاه e کدام است؟

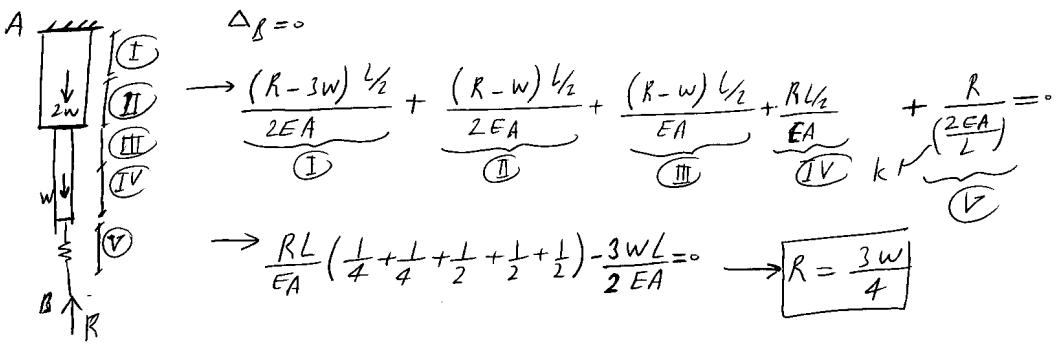
۱) $\frac{13}{17}$ ۲) $\frac{17}{44}$ ۳) $\frac{11}{13}$ ۴) $\frac{13}{27}$

سراسری ۸۷

۵۴- در سیستم نشان داده شده در شکل روبرو، مطلوبست نیروی فنر (ω و 2ω وزن قطعات نشان داده شده در شکل می‌باشد)

۱) 2ω
۲) $\frac{3}{4}\omega$
۳) $\frac{1}{2}\omega$
۴) $\frac{1}{3}\omega$





سراسری ۹۱

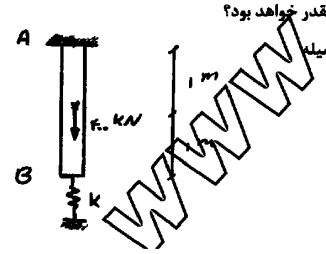
۴۹- میله AB به طول m ۲ از نقطهٔ A به تکیه‌گاه و در نقطهٔ B با یک فنر با سختی $k = ۴\times۱۰^{۹}\ \frac{N}{m}$ بسته شده است. اگر نیروی ۴۰۰ kN به وسط این میله اعمال شود، تغییر طول میله بر حسب متر چقدر خواهد بود؟ $m^{۲}$ ۴×۱۰^{-۲} - سطح مقطع میله و ۲۰۰ GPa = ضریب الاستیسیته میله

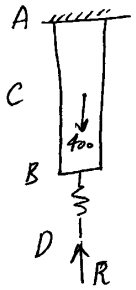
۱) ۱۰۰×۱۰^{-۶}

۲) ۲۵×۱۰^{-۶}

۳) ۵۰×۱۰^{-۶}

۴) صفر





تکیه‌گاه D را حذف و به جایش نیروی R را وارد می‌کنیم
سپس تغییرمکان تکیه‌گاه D را برابر صفر قرار می‌دهیم:

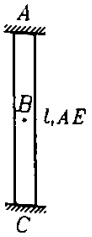
$$\Delta_D = \Delta_{DB} + \Delta_{BC} + \Delta_{CA} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{-R}{k} - \frac{R\times 1}{EA} - \frac{(R-400\times10^{3})\times 1}{EA} = 0$$

$$\rightarrow R\left(\frac{1}{4\times10^{9}} + \frac{1}{8\times10^{9}} + \frac{1}{8\times10^{9}}\right) = \frac{400\times10^{3}}{8\times10^{9}} \Rightarrow R = 100\ kN$$

$$\text{تغییر طول میله} = \Delta_{AB} = \Delta_{BC} + \Delta_{AC} = \frac{-100\times10^{3}\times1}{8\times10^{9}} + \frac{300\times10^{3}\times1}{8\times10^{9}} = 25\times10^{-6}\ m$$

مثال: تغییرمکان نقطه B وسط میله چقدر است؟ وزن کل میله برابر W است.



۱) $\frac{Wl}{۲AE}$

۲) $\frac{Wl}{۴AE}$

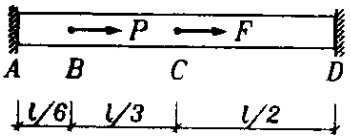
۳) $\frac{Wl}{۸AE}$

۴) $\frac{Wl}{۱۶AE}$

گزینه ۳:

آزاد ۸۵

در میله زیر نیروی F چقدر باشد تا فاصله نقاط B و C تغییر نکند؟ $(AE = const)$



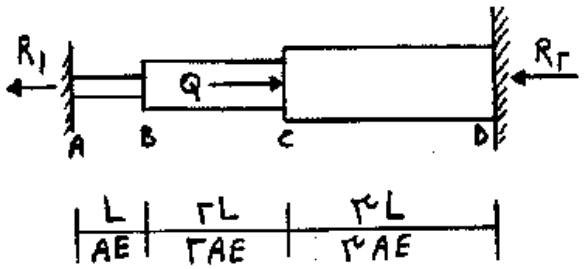
۱) $\frac{P}{3}$ ✓ ۲) $\frac{P}{2}$ ۳) $\frac{2P}{3}$ ۴) P

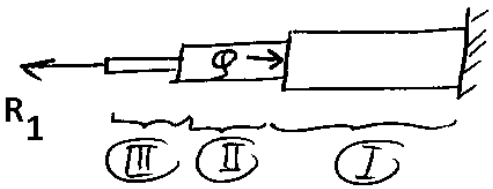
$$\Delta_B = \Delta_C \Rightarrow \frac{P(L/6)}{EA} = \frac{F(L/2)}{EA} \rightarrow F = \frac{P}{3}$$

تمرین: سراسری ۸۷

۵۵- کدام رابطه بین واکنش‌های سازه بر قرار است؟

۱) $R_2 = R_1$
۲) $R_2 = 2R_1$
۳) $R_2 = 3R_1$
۴) $R_2 = 4R_1$



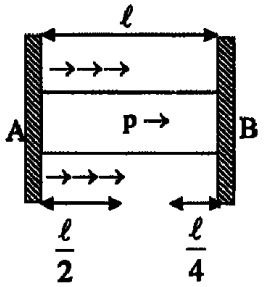


$$\Delta_A = \frac{R_1 L}{EA} + \frac{R_1(2L)}{2EA} + \frac{(R_1 - Q)3L}{3EA} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow R_1 = \frac{Q}{3} \\ \rightarrow R_2 = Q - R_1 = \frac{2Q}{3} \end{array}\right\} R_2 = 2R_1$$

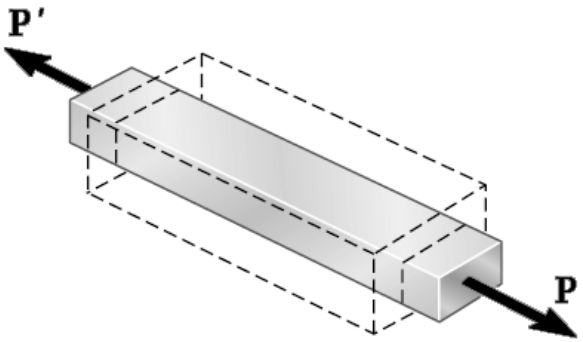
تمرین: آزاد ۹۳

۴۶- در شکل مقابل میله AB تحت نیروی متمرکز P محوری و گسترده ثابت q_0 قرار دارد. نیروی عکس‌العمل A_x چقدر است؟



۱) $\frac{3p}{4} + \frac{q_0 L}{8}$ ۲) $\frac{p}{2} + \frac{q_0 L}{2}$
۳) $\frac{p}{4} + \frac{3q_0 L}{8}$ ۴) $\frac{p}{4} + \frac{q_0 L}{8}$

۵-ضریب پواسون



$$\nu = \left|\frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}}\right| = -\frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}}$$

محدوده ضریب پواسون: $0 \le \nu \le \frac{1}{2}$

برای مواد تراکم ناپذیر ν برابر 0.5 می باشد.

اگر عضوی تحت اثر تنشهای چند جهته باشد:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$
$$\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$
$$\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

در بارگذاری تک محوری (اگر فقط σ_x داشته باشیم):

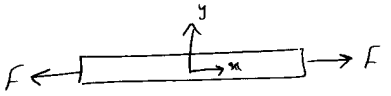
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$
$$\nu = \left|\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right|$$

مثال

میله‌ای به‌طول $20\,cm$ و قطر $4cm$ که تحت اثر نیروی محوری کششی ۴ تن است افزایش طول $0/03cm$ و کاهش قطر $0/0018cm$ دارد. ضریب پواسون میله چقدر است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۳ ✓ ۳) ۰/۳۳ ۴) ۰/۳۵

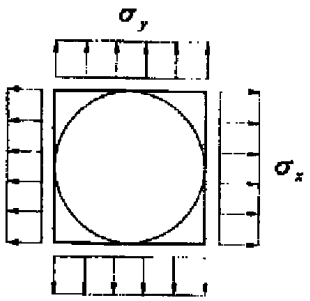
$L = 20$, $D = 4$, $F = 4000$ | $\Delta L = 0.03$, $\Delta D = 0.0018$



$$\nu = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{(0.0018/4)}{(0.03/20)} = 0.3$$

سراسری ۹۲- دکتری

۵- صفحه‌ای نازک و مربع شکل به ابعاد $۱۰۰mm \times ۱۰۰mm$ مفروض است. دایره‌ای به قطر $۱۰۰mm$ روی صفحه ترسیم شده است (دایرهٔ محاطی). اضلاع قائم و افقی صفحه به ترتیب تحت تنش‌های کششی $\sigma_x = ۸۰ \times ۱۰^۶ MPa$ و $\sigma_y = ۴۰ \times ۱۰^۶ MPa$ قرار می‌گیرند. اندازهٔ قطر بزرگ‌تر بیضی حاصل از تغییر شکل دایره چند میلی‌متر است؟ مدول ارتجاعی $E = ۶۰ \times ۱۰^۹ GPa$ و ضریب پواسون $\nu = ۰/۲۵$ است.



۱) ۱۰۰/۰۳۳

۲) ۱۰۰/۱۱۲

۳) ۱۰۰/۰۶۷

۴) ۱۰۰/۱۳۳

تمرین: سراسری ۷۹

ورقی به ابعاد $۲۰cm \times ۲۰$ تحت تنش در دو جهت مطابق شکل قرار دارد. اگر دایره‌ای به قطر $۱۰cm$ را در مرکز این ورق داشته‌باشیم، پس از اعمال تنشها این دایره چه وضعیتی را پیدا می‌کند؟

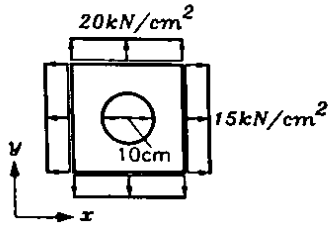
$(E = ۲ \times ۱۰^۴ \frac{kN}{cm^۲}, \nu = ۰/۳)$

۱) دایره‌ای به قطر $۱۰/۰۰۶۱۲۵cm$

۲) دایره‌ای به قطر $۱۰/۰۰۸۷۵cm$

۳) بیضی به قطرهای $۱۰/۰۰۷۵cm$ و $۱۰/۰۱cm$ در جهت محور X و Y به ترتیب

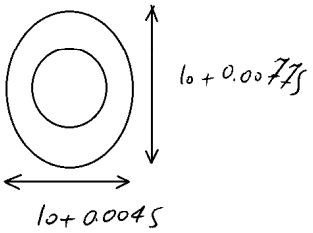
۴) بیضی با قطر $۱۰/۰۰۴۵cm$ و $۱۰/۰۰۷۷۵$ در جهت محور X و Y به‌ترتیب



$$\varepsilon_x = \frac{15}{2\times10^4} - 0.3\times\frac{20}{2\times10^4} = 4.5\times10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{20}{2\times10^4} - 0.3\times\frac{15}{2\times10^4} = 7.75\times10^{-4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \Delta x = 4.5\times10^{-4}\times 10 = 0.0045cm \\ \Delta y = 7.75\times10^{-4}\times 10 = 0.00775cm \end{cases} \rightarrow$$

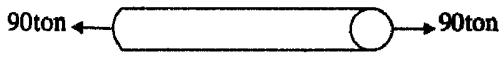


تمرین: آزاد ۹۳

۵۸ـ یک میله به قطر 10 cm تحت اثر نیروی کششی قرار داد. تغییر قطر میله بعد از اعمال نیرو کدام است؟

$$E = 2\times10^6 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\mu = 0.29$$



۱) 0.00166

۲) 0.0166

۳) 0.166

۴) 1.66

کرنش سطحی: $\varepsilon_A = \varepsilon_x + \varepsilon_y$

مثال

یک میله با مقطع مربعی و سطح مقطع A تحت اثر بار محوری P قرار دارد.

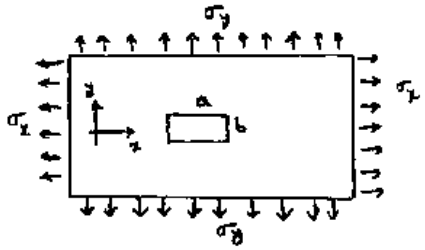
تغییر سطح مقطع این میله چقدر است؟

۱) $\frac{\nu P}{E}$ ۲) $\frac{2\nu P}{E}$ ۳) $\sqrt{\frac{\nu PA}{E}}$ ۴) $2\sqrt{\frac{\nu PA}{E}}$

$$\Delta A = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)A = \left(-\nu\frac{P}{EA} - \nu\frac{P}{EA}\right)A = -\frac{2\nu P}{E}$$

سراسری ۹۴

۴۷- پیش از اعمال تنش های σ_x، σ_y به صفحه‌ی نازکی، مستطیلی به ابعاد a و b مطابق شکل بر روی آن علامت زده می‌شود. اگر مساحت مستطیل پس از اعمال تنش‌ها بدون تغییر بماند، کدام مورد صحیح است؟ (ν ضریب پواسون صفحه است و $\sigma_z = 0$)



۱) $a\sigma_x + b\sigma_y = 0$

۲) $\sigma_x + \sigma_y = 0$

۳) $\sigma_x - \sigma_y = 0$

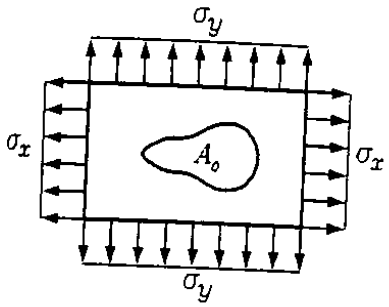
۴) $\nu = \frac{1}{2}$

از آنجا که سطح ab تغییر نکرده است، بنابراین کرنش سطی در آن باید برابر صفر باشد:

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{(1-\nu)(\sigma_x + \sigma_y)}{E} = 0 \rightarrow \quad \sigma_x + \sigma_y = 0$$

تمرین:

تغییر سطح شکل رسم شده بر روی صفحه مستطیلی زیر چقدر است؟ (سطح اولیه شکل A_0، مدول یانگ E و ضریب پواسون ν می‌باشد)



۱) $\frac{1-\nu}{2E}(\sigma_x + \sigma_y)A_0$

۲) $\frac{1-2\nu}{2E}(\sigma_x + \sigma_y)A_0$

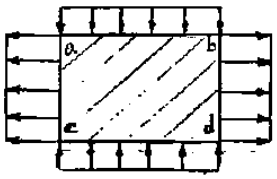
۳) $\frac{1-\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)A_0$ ✓

۴) $\frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y)A_0$

$$\Delta A = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)A_0 = \left(\frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E}\right)A_0 = (\sigma_x + \sigma_y)\left(\frac{1-\nu}{E}\right)A_0$$

تمرین: سراسری ۸۱

۴۴- یک ورق فولادی به مساحت $۱۵۰cm^۲$ و ضخامت ۱cm تحت اثر تنش‌های یکنواختی مطابق شکل قرار گرفته است. مقدار تغییر مساحت بر حسب $mm^۲$ کدام است؟ ($E = ۲۰۰Gpa$ ، $\nu = ۰/۳$)



۱) ۴/۸۰
۲) ۵/۸۲
۳) ۱۰/۵
۴) ۱۱/۲۵

$$\Delta A = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)A \longrightarrow \Delta A = \left[\left(\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E}\right) + \left(\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E}\right)\right]A = \left[\frac{\sigma_x}{E}(1-\nu) + \frac{\sigma_y}{E}(1-\nu)\right]A$$

$$= \left[\frac{400}{200000}(0.7) + \frac{-200}{200000}(0.7)\right] \times 150 = 0.105\,cm = 10.5mm^2$$

منظور از تنش مسطح و کرنش مسطح چیست؟

مثال

در حالت تنش مسطح در صفحات اصلی xy، ε_z برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ ✓
۲) $\frac{-\nu}{۲(1-\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$
۳) $-\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$
۴) $\frac{-\nu}{۲}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$

مثال:

در حالت تنش مسطح در صفحه xy کدامیک از گزینه‌ها شرط کافی برای صفر شدن ε_z است؟

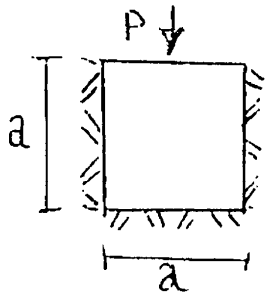
۱) $\tau_{xy} = ۰$
۲) $\tau_{xy} = ۰$ و $\sigma_y = \sigma_x$
۳) $\tau_{xy} = ۰$ و $\sigma_y = -\sigma_x$
۴) $\sigma_y = -\sigma_x$ ✓

در تنش مسطح داریم: $\sigma_z = ۰$ بنابراین ε_z برابر است با:

$$\varepsilon_z = ۰ - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} \xrightarrow{\varepsilon_z = ۰} \sigma_x = -\sigma_y$$

سراسری ۹۰

۴۸- **مکعبی به ضلع a در محفظه‌ای مطابق شکل قرار داده شده به طوری که تغییر طول آن فقط در جهت قائم امکان‌پذیر و تحت فشار یکنواخت P بر سطح فوقانی قرار گرفته است. تغییر ضلع قائم مکعب کدام مقدار زیر است؟ (V ضریب پواسون می‌باشد.)**

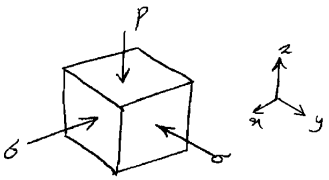


۱) $\frac{P.a}{E}\frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2}$

۲) $\frac{P.a}{E}\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}$

۳) $\frac{P.a}{E}\frac{1-\nu}{1+\nu^2}$

۴) $\frac{P.a}{E}\frac{1-\nu-2\nu^2}{1+\nu^2}$



با توجه به اینکه تغییر شکل در راستای x و y صفر است، کرنش نیز در این راستاها صفر خواهد بود:

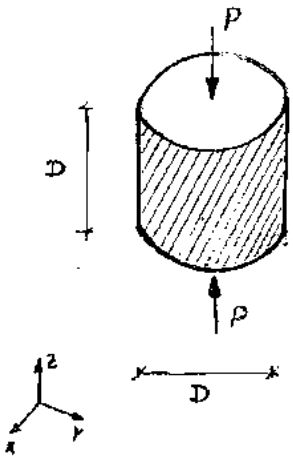
$$\varepsilon_x = \left(\frac{-\sigma}{E}\right) - v\left(\frac{-\sigma}{E}\right) - v\left(\frac{-P}{E}\right) = 0 \;\rightarrow\; \sigma = \frac{vP}{1-v}$$

$$\varepsilon_z = \left(\frac{-P}{E}\right) - v\left(\frac{-\sigma}{E}\right) - v\left(\frac{-\sigma}{E}\right) = -\frac{P}{E}\left(\frac{1-v-2v^2}{1-v}\right)$$

$$\Delta_z = \varepsilon_z a = -\frac{Pa}{E}\left(\frac{1-v-2v^2}{1-v}\right)$$

تمرین: سراسری ۸۶

۵۱- **نمونه استوانه‌ای شکل مقابل با قطر و ارتفاع D زیر اثر نیروی محوری P که بطور یکنواخت در مقطع تقسیم شده از بالا و پایین قرار گرفته است. در صورتی‌که از تغییر شکل جانبی استوانه جلوگیری شود، مطلوبست تغییر طول استوانه:**



۱) $\Delta_z = \frac{4P}{\pi D^2 E}.\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}$

۲) $\Delta_z = \frac{4P}{\pi D^2 E}.\frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2}$

۳) $\Delta_z = \frac{4P}{\pi D E}.\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}$

۴) $\Delta_z = \frac{4P}{\pi D E}.\frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2}$

گزینه ۳:

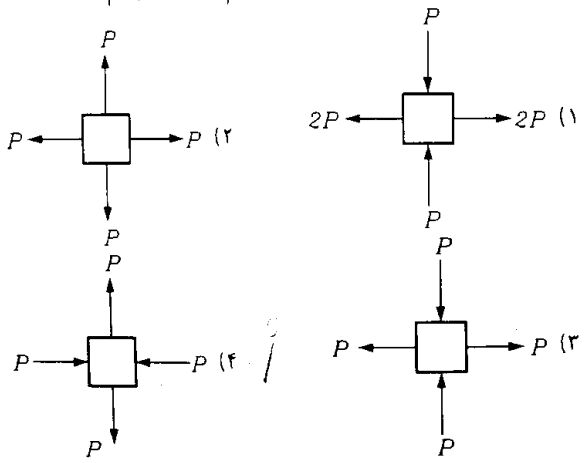
کرنش حجمی، ضریب انبساط حجمی:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2v}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)$$

نکته: تغییر حجم نسبی المان به مجموع تنش های اصلی وارد شده وابسته است.

مثال

درکدامیک از المانهای زیر تغییر حجم المان ماکزیمم است؟



$$\Delta V = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) V \longrightarrow \Delta V = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\frac{(1-2\nu)}{E} \times V$$

نکته: هرالمانی که جمع تنش‌ها $(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$ در آن بیشتر باشد تغییر حجم آن بیشتر است

$\Sigma P = P+P = 2P \leftarrow$ (2 $\qquad \Sigma P = (2P-P) = P \leftarrow$ (1

$\Sigma P = P-P = 0 \leftarrow$ (4 $\qquad \Sigma P = (P-P) = 0 \leftarrow$ (3

سراسری ۹۱

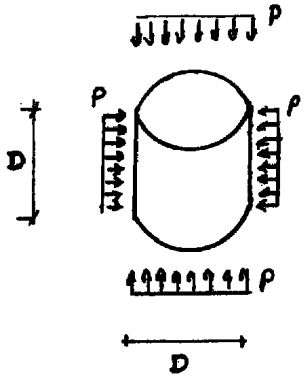
۵۵- عضو استوانه‌ای شکل با قطر و ارتفاع D و مشخصات ماده برابر E و $\nu = 0/25$ تحت فشار همه جانبه P می‌باشد. تغییر حجم استوانه کدام رابطه زیر است؟

۱) $\frac{9\pi D^3.P}{8E}$

۲) $\frac{3\pi D^3.P}{8E}$

۳) $\frac{9\pi D^3.P}{16E}$

۴) $\frac{3\pi D^3.P}{4E}$

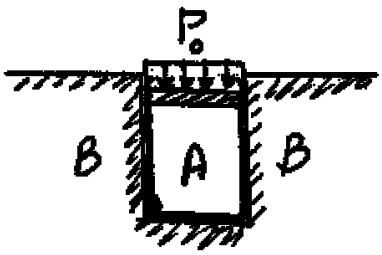


$$\Delta V = \varepsilon_v \times V = \frac{(1-2\nu)(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)}{E} \times \left[\frac{\pi D^2}{4} \times D\right]$$

$$\Delta V = \frac{0.5(-3P)}{E}\ \frac{\pi D^3}{4} = \frac{-3P\pi D^3}{8E}$$

سراسری ۹۳- دکتری

۱۰- در شکل نشان داده شده هرگاه دیواره B صلب فرض شود و مخزن استوانه‌ای A تغییر شکل‌پذیر باشد، فشار جانبی مابین استوانه A و دیـوارهٔ B برحسـب P_c و ضریب پواسون ν کدام است؟



۱) $\frac{P_c}{(1-\nu)}$

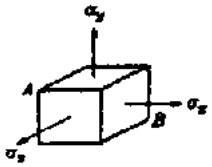
۲) $\frac{P_c}{(1+\nu)}$

۳) $\frac{\nu P_c}{(1+\nu)}$

۴) $\frac{\nu P_c}{(1-\nu)}$

آزاد ۸۸

۴۵- در المان مکعبی زیر تغییر سطح جانبی المان چقدر است؟ (بعد المان a، مدول یانگ E و ضریب پواسون ν می باشد).



۱) $\frac{4(1-2\nu)a^2}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$

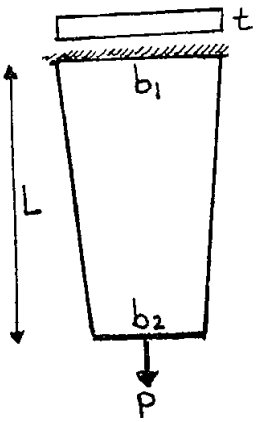
۲) $\frac{4(1-\nu)a^2}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$

۳) $\frac{8(1-2\nu)a^2}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$

۴) $\frac{8(1-\nu)a^2}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$

سراسری ۸۸

یک ورق فولادی با ضریب ارتجاعی E، ضریب پوآسون ν، ضخامت ثابت t و عرض متغیر نشان داده شده در شکل که از وزن آن صرفنظر گردیده است تحت اثر نیروی محوری P قرار گرفته است. تغییر حجم آن چقدر است؟



۱) $\frac{PL}{E}(1-\nu)$

۲) $\frac{PL}{E}(1-2\nu)$

۳) $\frac{PL}{2E}(1-\nu)$

۴) $\frac{(b_1+b_2)PL}{2Et}(1-2\nu)$

سراسری ۹۳

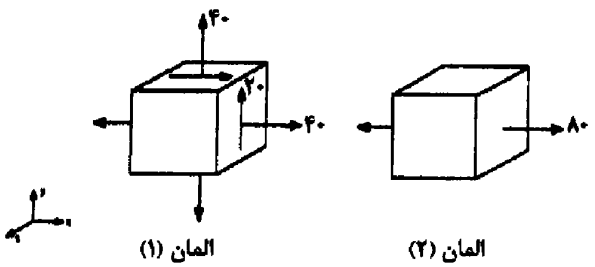
۴۷- در دو المان نشان داده شده چه رابطه‌ای بین کرنش حجمی دو المان وجود دارد؟

۱) $\varepsilon_{v_1} = 1/2\varepsilon_{v_2}$

۲) $\varepsilon_{v_1} = \varepsilon_{v_2}$

۳) $\varepsilon_{v_1} = \frac{1}{2}\varepsilon_{v_2}$

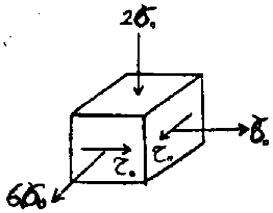
۴) $\varepsilon_{v_1} = 2\varepsilon_{v_2}$



تمرین: آزاد ۹۱

۴۴- اگر بعد از اعمال تنش‌ها، حجم المان نشان داده شده نیم درصد افزایش یابد مقدار σ_0 چند مگاپاسکال می‌باشد؟

$(E = 6\times10^4\ MPa\ ,\ \upsilon = 0.2)$



۱) 50
۲) 75
۳) 100
۴) 200

گزینه ۳

درصد تغییر حجم المان (کرنش حجمی) برابر است با:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2v}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)$$

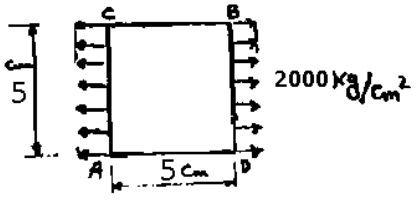
$$\rightarrow 0.005 = \frac{1-0.4}{6\times10^4}(6\sigma_0 + \sigma_0 - 2\sigma_0) \rightarrow \sigma_0 = 100MPa$$

نحوه تعیین تغییر قطر:

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c.dc = a.da + b.db \rightarrow dc = \frac{a.da+b.db}{c} = \frac{a.da+b.db}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

سراسری ۸۱

۳۵- ورقی مطابق شکل، تحت تنش تک محوری قرار گرفته است، تغییر قطر AB چند cm است؟ ($\nu = 0/3$ ، $E = 2 \times 10^6$ kg/cm^2)



۱) $2/47 \times 10^{-3}$

۲) $3/54 \times 10^{-3}$

۳) 5×10^{-3}

۴) $7/70 \times 10^{-3}$

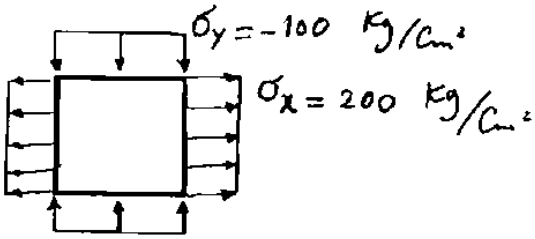
$$c \times c' = a \times a' + b \times b'$$
$$5\sqrt{2} \times c' = 5 \times a' + 5 \times b'$$

پس اگر a' و b' را داشته باشیم، مقدار تغییرقطر بدست می آید:

$$b' = 5 \times \varepsilon_y = 5 \times \left(-0.3 \times \frac{2000}{2 \times 10^6}\right) = -1.5 \times 10^{-3}$$
$$a' = 5 \times \varepsilon_x = 5 \times \left(\frac{2000}{2 \times 10^6}\right) = 5 \times 10^{-3}$$
$$c' = \frac{\sqrt{2}}{2}(a' + b') = 2.47 \times 10^{-3}$$

تمرین: سراسری ۸۳

۵۲- صفحه ای مربع شکل به اضلاع ۱۰ سانتیمتر تحت تاثیر تنشهای σ_x و σ_y مطابق شکل قرار دارد. تغییر طول قطر این صفحه چقدر است؟ ($\nu = 0/2$, $E = 2 \times 10^6$ kg/cm^2)



۱) $1/23 \times 10^{-2}$ cm

۲) $2/47 \times 10^{-2}$ cm

۳) $4/94 \times 10^{-2}$ cm

۴) $7/41 \times 10^{-2}$ cm

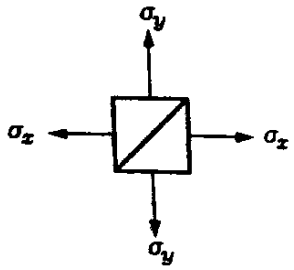
$$10\sqrt{2} \times \Delta_{\text{قطر}} = 10 \times \Delta_x + 10 \times \Delta_y$$

پس اگر Δ_y و Δ_x را داشته باشیم، مقدار تغییرقطر بدست می آید:

$$\Delta_x = 10 \times \varepsilon_x = 10 \times \left(\frac{200}{2 \times 10^6} - 0.3 \times \frac{-100}{2 \times 10^6}\right) = 11.5 \times 10^{-4}$$
$$\Delta_y = 10 \times \varepsilon_y = 10 \times \left(\frac{-100}{2 \times 10^6} - 0.3 \times \frac{200}{2 \times 10^6}\right) = -8 \times 10^{-4}$$
$$\Delta_{\text{قطر}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\Delta_x + \Delta_y) = 2.47 \times 10^{-4}$$

مثال

تغییر طول قطر المان مربعی شکل زیر (به ضلع a) چقدر است؟



۱) $\sqrt{2}a(1-\nu)\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{E}$

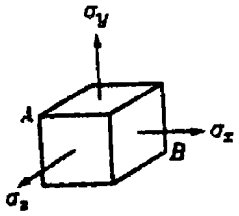
۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}a(1-\nu)\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{E}$ ✓

۳) $a(1-\nu)\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{E}$

۴) $\frac{a}{2}(1-\nu)\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{E}$

آزاد ۸۷

۴۵- در المان مکعبی زیر تغییر طول قطر AB چقدر است؟ (بعد المان a، مدول یانگ E و ضریب پواسون ν می باشد)



۱) $\frac{\sqrt{3}(1-\nu)a}{3E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$

۲) $\frac{\sqrt{3}(1-\nu)a}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$

۳) $\frac{\sqrt{3}(1-2\nu)a}{3E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$

۴) $\frac{\sqrt{3}(1-2\nu)a}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$

$$a\sqrt{3}\times\Delta_{\text{قطر}}=a\times\Delta_x+a\times\Delta_y+a\times\Delta_z=a\times(\Delta_x+\Delta_y+\Delta_z)$$

$$\Delta_{\text{قطر}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times(\Delta_x+\Delta_y+\Delta_z)$$

$$\Delta_x+\Delta_y+\Delta_z=(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)a=\frac{(1-2v)(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)}{E}a$$

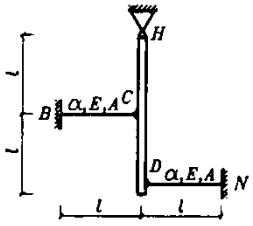
$$\Delta_{\text{قطر}}=\frac{\sqrt{3}a(1-2v)(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)}{3E}$$

۶-حرارت

$$\varepsilon = \alpha.\Delta T \rightarrow \Delta L = \alpha.\Delta T.L$$

سراسری ۸۰

در شکل مقابل میله صلب HD توسط میله‌های مشابه BC و DN نگهداری شده‌است. اگر درجه حرارت میله BC به اندازه $+\Delta T$ افزایش یابد، عکس‌العمل تکیه‌گاه H کدام است؟



۱) $H_x = ۰/۴\Delta TEA\alpha$

۲) $H_x = ۰/۵\Delta TEA\alpha$

۳) $H_x = \Delta TEA\alpha$

۴) $H_x = ۲\Delta TEA\alpha$

سراسری ۸۲

۴۵- تنش در میله های شکل روبرو به شرح زیر است:

$\sigma_۲ = ۰$ و $\sigma_۱ = \sigma_۳ = ۱۰۰\text{MPa}$

درجه حرارت هر سه میله ۲۰ درجه سانتیگراد افزایش می یابد، تنش در هر میله بر حسب MPa چقدراست؟

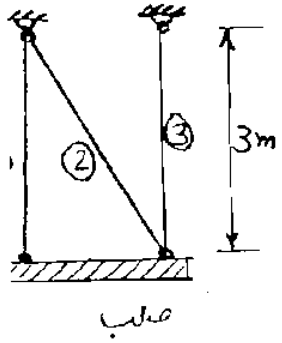
$\alpha = ۱۱\times۱۰^{-۶}/^{\circ}\text{C}$, $\text{E} = ۲\times۱۰^{۵}$ MPa

۱) $\sigma_۲ = ۰$ و $\sigma_۱ = \sigma_۳ = ۱۰۰$

۲) $\sigma_۲ = ۴۴$ و $\sigma_۱ = \sigma_۳ = ۱۴۴$

۳) $\sigma_۲ = -۴۴$ و $\sigma_۱ = \sigma_۳ = ۵۶$

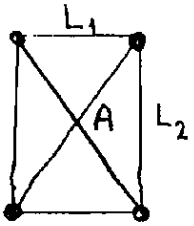
۴) $\sigma_۲ = -۵۶$ و $\sigma_۱ = ۰$ و $\sigma_۳ = ۱۴۴$



گزینه ۱:

سراسری ۸۳

۴۸- در شکل روبرو جنس و سطح مقطع همه میله ها یکی است. دو میله مایل در A بهم اتصالی ندارند. در اثر افزایش درجه حرارت چه تنشی در میله ها بوجودمی آید؟



۱)تنشی ایجاد نمی شود.

۲)در تمام میله ها تنش فشاری ایجاد می شود.

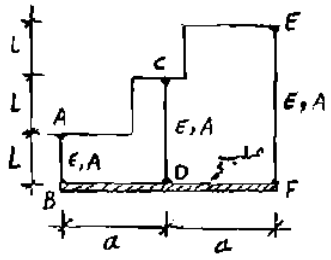
۳) در میله های مایل تنش کششی و در بقیه میله ها تنش فشاری ایجاد می شود.

۴) در میله های مایل تنش فشاری و در بقیه میله ها تنش کششی ایجاد می شود.

از آنجا که به کل سازه حرارت اعمال می شود و جنس هم یکی است، گزینه ۱ صحیح است.

سراسری ۸۴

در شکل مقابل چنانچه حرارت میله CD به اندازه ΔT افزایش یابد، میزان تغییر مکان نقطه D چقدر می‌باشد؟



۱) $\alpha L\Delta T$

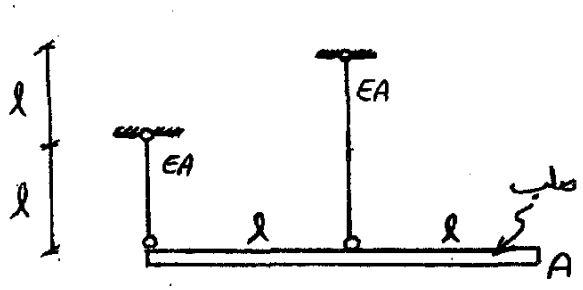
۲) $\frac{۱}{۳}\alpha L\Delta T$

۳) $۲\alpha L\Delta T$

۴) $\frac{۲}{۳}\alpha L\Delta T$

آزاد ۹۲

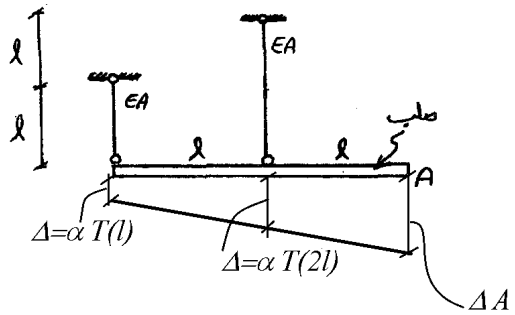
۴۴- چنانچه دمای هر دو میله به اندازه ΔT افزایش داده شود تغییرمکان گره A کدام است؟ (ضریب انبساط حرارتی میله‌ها α می‌باشد)



۱) $2\alpha\,\Delta T\ell$ ۲) $3\alpha\,\Delta T\ell$

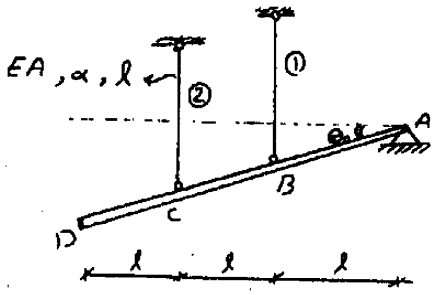
۳) $4\alpha\,\Delta T\ell$ ۴) $5\alpha\,\Delta T\ell$

گزینه ۲: با توجه به شکل زیر، تغییرمکان گره A برابر $3\alpha Tl$ خواهد بود.



آزاد ۹۱

۴۲- در سازه نشان داده شده میله صلب ABCD با راستای افق زاویه کوچک θ دارد. اگر درجه حرارت میله ۲ را به اندازه ΔT کاهش دهیم تا میله صلب در راستای افق قرار گیرد، آنگاه نیروی ایجاد شده در میله ۲ کدام است؟ (میله‌های ۱ و ۲ مشابه و دارای طول یکسان می‌باشند)

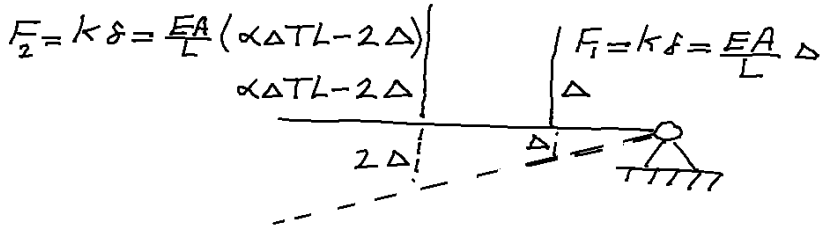


۱) $\frac{1}{5}\alpha\Delta TEA$ (α ضریب انبساط حرارتی است) ۲) $\frac{2}{5}\alpha\Delta TEA$

۳) $\frac{3}{5}\alpha\Delta TEA$ ۴) $\frac{4}{5}\alpha\Delta TEA$

گزینه ۱ صحیح است.

در صورتی که تغییر مکان میله صلب را مطابق شکل بر حسب Δ نمایش دهیم، می توان نیروهای وارد بر میله صلب را محاسبه کرد:



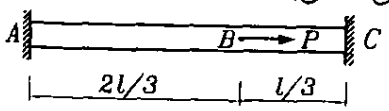
حال با لنگر گیری حول نقطه A می توان مقدار Δ را محاسبه کرد:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow F_2 \times (2L) - F_1 \times (L) = 0$$
$$\rightarrow (\alpha\Delta TL - 2\Delta) \times (2L) - (\Delta) \times (L) = 0$$
$$\rightarrow \Delta = \frac{2\alpha\Delta TL}{5}$$

و بنابراین مقدار F2 برابر است با:

$$F_2 = \frac{EA}{L}(\alpha\Delta TL - 2\Delta) = \frac{EA}{L}\left(\alpha\Delta TL - \frac{4\alpha\Delta TL}{5}\right) = \frac{\alpha\Delta TEA}{5}$$

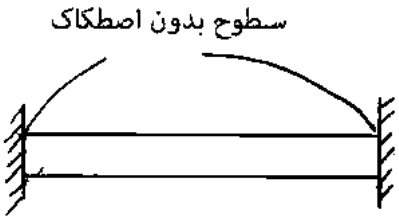
میله زیر را باید حداقل چند درجه سانتی‌گراد گرم کرد تا هیچ نقطه‌ای از آن تحت کشش نباشد؟
(سطح مقطع میله A، مدول الاستیسیته E و ضریب انبساط حرارتی α می‌باشد)



۱) $\frac{P}{AE\alpha}$ ۲) $\frac{P}{2AE\alpha}$ ۳) $\frac{P}{3AE\alpha}$ ۴) $\frac{P}{4AE\alpha}$

سراسری ۹۴

۵۲- میله‌ای استوانه‌ای مطابق شکل زیر بین دو تکیه‌گاه در دمای T_0 بدون نیروی محوری داخلی قرار گرفته است. اگر شعاع اولیه‌ی میله R_0 باشد، تغییر شعاع میله در اثر افزایش دمای ΔT کدام است؟ E مدول الاستیسیته، ν نسبت پواسون، $G=\frac{E}{2(1+\nu)}$ مدول برشی و α ضریب انبساط حرارتی می‌باشند.



۱) $\frac{2G}{E}\alpha\Delta TR_0$
۲) $\frac{2E}{G}\alpha\Delta TR_0$
۳) $\frac{E}{2G}\alpha\Delta TR_0$
۴) $\frac{G}{2E}\alpha\Delta TR_0$

تغییر شعاع میله برابر است با:

$$\Delta R = \varepsilon_R \times R_0$$

برای بدست آوردن کرنش در راستای شعاع لازم است تنش طولی میله بدست آید. برای بدست آوردن تنش طولی باید سازگاری تغییرشکل در انتهای (تکیه گاه) میله را بررسی کنیم. با توجه به اینکه کرنش در راستای طولی صفر است (میله دوسرگیردار)، داریم:

$$\varepsilon_L = \alpha\Delta T - \frac{\sigma_L}{E} = 0 \rightarrow \frac{\sigma_L}{E} = -\alpha\Delta T$$

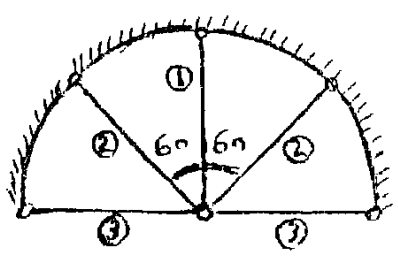
مقدار کرنش شعاعی برابر است با:

$$\varepsilon_L = \alpha\Delta T - v\frac{\sigma_L}{E} = (1+v)\alpha\Delta T$$

$$\Delta R = \varepsilon_R \times R_0 = (1+v)\alpha\Delta TR_0 = \frac{E}{2G}\alpha\Delta TR_0$$

آزاد ۹۰

۴۳- تمام میله‌ها مشابه هستند (α, E, A, ℓ) چنانچه دمای میله‌ای (۱) و (۲) را به اندازه ΔT افزایش دهیم نیروی میله‌ها کدام است؟



۱) $F_1 = \frac{1}{3}\alpha\Delta TEA$ (کششی)
$F_2 = \frac{1}{3}\alpha\Delta TEA$ (فشاری)
$F_3 = 0$

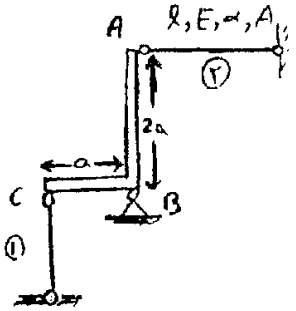
۲) $F_1 = F_2 = F_3 = \frac{1}{3}\alpha\Delta TEA$ (فشاری)

۳) $F_1 = F_2 = F_3 = 0$

۴) $F_1 = \alpha\Delta TEA$ (کششی)
$F_2 = \alpha\Delta TEA$ (فشاری)
$F_3 = 0$

آزاد ۹۰

۴۱- میله‌های ۱ و ۲ مشابه و دارای طول یکسان می‌باشند چنانچه دمای میله (۱) را به اندازه ΔT افزایش و دمای میله (۲) را به اندازه ΔT کاهش دهیم، مقدار نیروی ایجاد شده در این دو میله کدام است؟ (قطعه ABC صلب می‌باشد)



۱) $F_1 = \frac{2}{3}\alpha\Delta TEA$, $F_2 = \frac{1}{3}\alpha\Delta TEA$

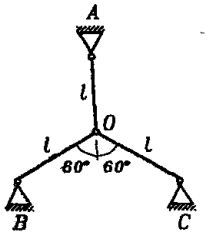
۲) $F_1 = \frac{4}{5}\alpha\Delta TEA$, $F_2 = \frac{2}{5}\alpha\Delta TEA$

۳) $F_1 = \frac{3}{5}\alpha\Delta TEA$, $F_2 = \frac{6}{5}\alpha\Delta TEA$

۴) $F_1 = \frac{2}{5}\alpha\Delta TEA$, $F_2 = \frac{1}{5}\alpha\Delta TEA$

آزاد ۸۸

در خرپای زیر اگر دمای میله‌های OB و OC به‌میزان ΔT کاهش یابد و دمای میله OA به‌میزان $2\Delta T$ افزایش یابد چه نیرویی در میله OA بوجود می‌آید؟ (ضریب انبساط حرارتی اعضا α می‌باشد و $AE = const$)



۱) $AE\alpha\Delta T$

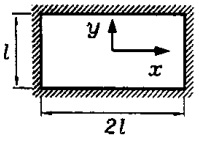
۲) $\frac{۴}{۳}AE\alpha\Delta T$

۳) $۲AE\alpha\Delta T$

۴) ۰

آزاد ۸۸

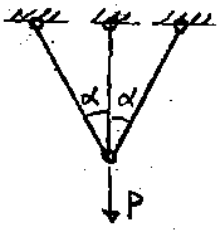
در صفحه زیرکه توسط تکیه‌گاه‌های صلب نگه داشته شده است،
اگر دما به میزان ΔT کاهش یابد تنش کششی ایجاد شده چقدر است؟



۱) $E\alpha\Delta T$
۲) $\frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu}$
۳) $\frac{E\alpha\Delta T}{1+\nu}$
۴) $(1+\nu)E\alpha\Delta T$

سراسری ۸۵

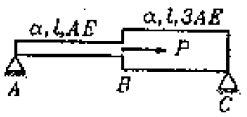
سه میله با سطح مقطع و جنس یکسان مطابق شکل روبرو زیر اثر نیروی P قرار گرفته‌اند. برای آنکه نیروی هر سه میله برابر شود باید:



۱) حرارت سازه را کاهش داد.
۲) حرارت سازه را افزایش داد.
۳) نیروها از ابتدا برابرند و نیاز به تغییر درجه حرارت نیست.
۴) با تغییر درجه حرارت امکان ندارد نیروی هر سه میله مساوی شود.

تمرین: آزاد ۸۶

۴۳- در میله زیر برای آنکه تنش در میله AB صفر شود دمای میله چقدر باید افزایش یابد؟

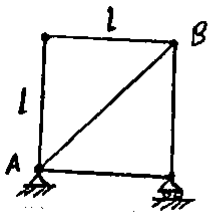


۱) $\frac{P}{6AE\alpha}$ ۲) $\frac{P}{4AE\alpha}$ ۳) $\frac{P}{3AE\alpha}$ ۴) $\frac{P}{2AE\alpha}$

گزینه ۱

تمرین: آزاد ۸۵

۸۸- اگر تمام اعضای خرپای روبرو به اندازه ΔT گرم شوند نیروی عضو AB چقدر خواهد بود؟ سطح مقطع همه اعضا A و ضریب انبساط حرارتی α است.

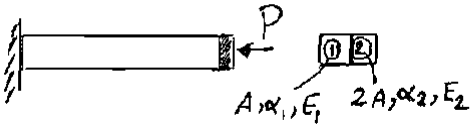


۱) $\alpha l\sqrt{2}\,\Delta T$ ۲) 0 ۳) $\sqrt{2}\,EA\alpha\Delta T$ ۴) $EA\alpha\Delta T$

سراسری ۸۳

۶۰- مطابق شکل دو میله ۱ و ۲ بدون اتصال بهم و به جایی توسط نیروی p وارد بر صفحه صلب به دیوار تکیه داده شده اند. با کاهش دمای سیستم به اندازه T، میله ۱ و با افزایش دمای آن به اندازه T ۳ میله ۲ رها خواهد شد. $\frac{E_1}{E_2}$ چقدر است؟ صفحه صلب همواره هموديو محور طولی میله ها باقی می ماند.

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳



مسلما ضریب حرارتی میله ۱ بیشتر است:

با سرد شدن سیستم، میله ۱ بیشتر از میله ۲ کوتاه می شود و بنابراین میله ۲ که طول بیشتری دارد باید نیروی p را تحمل کند (۱ آزاد میشود)

با گرم شدن سیستم، میله ۱ بیشتر بلند می شود و بنابراین میله ۱ که طول بیشتری دارد باید نیروی p را تحمل کند (۲ آزاد میشود)

وقتی سیستم سرد می شود:

کاهش طول میله ۱ برابر است با: $\Delta L_1 = -\alpha_1 TL$

کاهش طول میله ۲ برابر است با: $\Delta L_2 = -\alpha_2 TL - \frac{PL}{E_2(2A)}$

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \rightarrow\rightarrow -\alpha_1 TL = -\alpha_2 TL - \frac{PL}{E_2(2A)} \rightarrow\rightarrow \left[\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{P}{2E_2 AT}\right]$$

وقتی سیستم گرم می شود:

افزایش طول میله ۱ برابر است با: $\Delta L_1 = \alpha_1(3T)L - \frac{PL}{E_1(A)}$

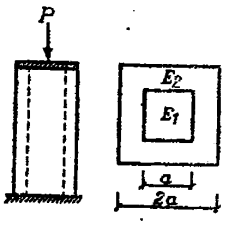
افزایش طول میله ۲ برابر است با: $\Delta L_2 = \alpha_2(3T)L$

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \rightarrow\rightarrow 3\alpha_1 TL - \frac{PL}{E_1(A)} = 3\alpha_2 TL \rightarrow\rightarrow \left[\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{P}{3E_1 AT}\right]$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{2}{3}$$

آزاد۸۹

٤٦-اگر دمای ستون مربعی زیر به میزان T افزایش یابد نیروی فشاری P بصورت مساوی توسط مقاطع اول و دوم تحمل می‌شود. دمای ستون چگونه تغییر می‌کند تا تمام نیروی فشاری P را مقطع اول تحمل کند؟ ($E_1=4E_2$)



۱) به میزان ٦T کاهش یابد

۲) به میزان ٦T افزایش یابد.

۳) به میزان ۸T کاهش یابد.

٤) به میزان ۸T افزایش یابد.

در حالت اول:

افزایش طول میله ۱ : $\Delta L_1 = \alpha_1 TL - \frac{\frac{P}{2}L}{E_1(a^2)}$ افزایش طول میله ۲ : $\Delta L_2 = \alpha_2 TL - \frac{\frac{P}{2}L}{E_2(3a^2)}$

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \rightarrow \alpha_1 TL - \frac{\frac{P}{2}L}{E_1(a^2)} = \alpha_2 TL - \frac{\frac{P}{2}L}{E_2(3a^2)} \rightarrow\rightarrow \left[\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{P}{Ta^2}\left(\frac{1}{6E_1}\right)\right]$$

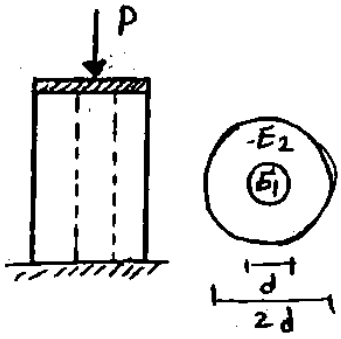
در حالت دوم:

تغییر طول میله ۱ برابر است با: $\Delta L_1 = \alpha_1 T'L - \frac{PL}{E_1(a^2)}$ تغییر طول میله ۲ برابر است با: $\Delta L_2 = \alpha_2 T'L$

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \rightarrow \alpha_1 T'L - \frac{PL}{E_1(a^2)} = \alpha_2 T'L \rightarrow\rightarrow \left[\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{-P}{E_1 T' a^2}\right] \rightarrow\rightarrow\rightarrow T' = -6T$$

تمرین: آزاد ۸۵

۷۲- اگر دمای ستون زیر به میزان T افزایش یابد قسمت داخلی مقطع ۳۰ درصد نیروی فشاری P را تحمل می کند و اگر به میزان 3T کاهش یابد قسمت خارجی مقطع ۳۰ درصد نیروی فشاری P را تحمل می کند. نسبت $\frac{E_1}{E_2}$ چقدر است؟



۱) ۱/۵ ۲) ۳ ۳) ۲ ٤) ٤/٥

در حالت اول:

تغییر طول میله ۱ : $\Delta L_1 = \alpha_1 TL - \frac{0.3PL}{E_1 A_1}$ تغییر طول میله ۲ : $\Delta L_2 = \alpha_2 TL - \frac{0.7PL}{E_2(3A_1)}$

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \rightarrow \alpha_2 TL - \frac{0.7PL}{E_2(3A_1)} = \alpha_1 TL - \frac{0.3PL}{E_1 A_1} \rightarrow\rightarrow \left[\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{P}{TA_1}\left(\frac{0.7}{3E_2} - \frac{0.3}{E_1}\right)\right]$$

در حالت دوم:

تغییر طول میله ۱ : $\Delta L_1 = -\alpha_1(3T)L - \frac{0.7PL}{E_1 A_1}$ تغییر طول میله ۲ : $\Delta L_2 = -\alpha_2(3T)L - \frac{0.3PL}{E_2(3A_1)}$

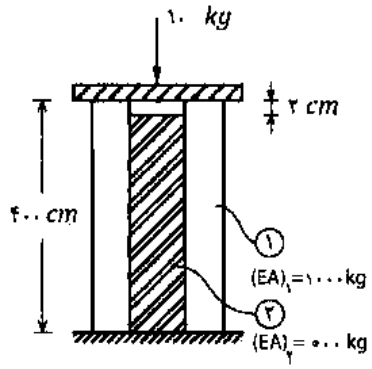
$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \rightarrow\rightarrow\rightarrow \left[\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{P}{TA_1}\left(\frac{0.7}{3E_1} - \frac{0.1}{3E_2}\right)\right]$$

$$\rightarrow\rightarrow\rightarrow \frac{0.7}{3E_2} - \frac{0.3}{E_1} = \frac{0.7}{3E_1} - \frac{0.1}{3E_2} \rightarrow\rightarrow \frac{1.6}{3E_1} = \frac{0.8}{3E_2} \rightarrow\rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 2$$

سراسری ۹۴

۵۳- در شکل زیر غلاف لوله‌ای (۱) هسته (۲) را در بر گرفته است. چنانچه هسته ۲ سانتی‌متر نسبت به غلاف کوتاه ساخته شده باشد، نیروی وارد بر کلاهک صلب به چه نسبتی بین آن‌ها توزیع می‌شود؟ ($\frac{P_2}{P_1}=?$)

۱) صفر
۲) $\frac{1}{5}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{1}{2}$



تا وقتی که استوانه بیرونی به اندازه 2cm فشرده نشود، کل بار به استوانه بیرونی اثر خواهد کرد. ابتدا باید بیابیم که تحت اثر چه باری استوانه بیرونی به اندازه 2cm فشرده خواهد شد:

$$2\ cm = \frac{PL}{EA_1} \rightarrow \quad 2cm = \frac{P \times 400}{1000} \quad \rightarrow \quad P = 5\ kg$$

با وارد شدن 5kg، استوانه بیرونی به اندازه 2cm فشرده شده و با هسته داخلی هم سطح می شود. 5kg بعدی هم به غلاف اثر می کند و هم به هسته. سهم غلاف از این 5kg برابر است با:

$$P_1 = 5kg \times \frac{EA_1}{EA_1 + EA_2} = 5 \times \frac{1000}{1500} = \frac{10}{3} kg$$

بنابراین مجموع بار وارد بر غلاف برابر است با:

$$P_1 = 5kg + \frac{10}{3} kg = \frac{25}{3}\ kg$$

مقدار بار وارد بر هسته برابر خواهد بود با:

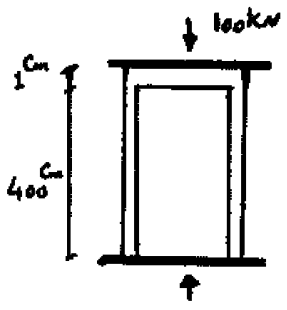
$$P_2 = P - P_1 = 10kg - \frac{25}{3} kg = \frac{5}{3}\ kg$$

$$\rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{5}$$

سراسری ۹۳- دکتری

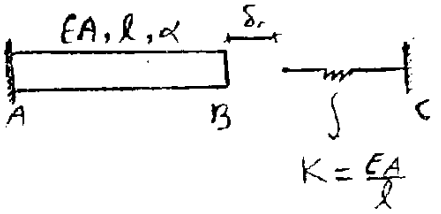
۱- دو استوانه توخالی به وسیله دوفک (صفحات صلب) در یک جک تحت اثر نیروی فشاری ۱۰۰ کیلونیوتن قرار می‌گیرند. اگر ارتفاع استوانه بیرونی ۱ سانتی‌متر از ارتفاع استوانه داخلی بیشتر باشد، نیروی وارد بر استوانه داخلی و استوانه خارجی به ترتیب از راست به چپ برحسب kN چقدر می‌باشند؟
(سطح مقطع هر کدام از استوانه‌ها $1cm^2$ و $E = 2\times10^7 \frac{N}{cm^2}$)

۱) ۱۰۰ ،۰
۲) ۷۵ ،۲۵
۳) ۵۰ ،۵۰
۴) ۲۵ ،۷۵



آزاد ۹۰

۴۵- انتهای B از میله AB به اندازه δ_0 از فنر فاصله دارد. دمای میله چقدر افزایش یابد تا فنر به اندازه $2\delta_0$ فشرده شود؟ (سختی فنر $K = \frac{EA}{\ell}$ می‌باشد)



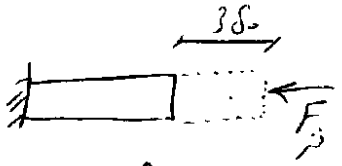
۱) $\frac{5\delta_0}{\alpha\ell}$

۲) $\frac{10\delta_0}{\alpha\ell}$

۳) $\frac{4\delta_0}{\alpha\ell}$

۴) $\frac{8\delta_0}{\alpha\ell}$

(45) فنر به اندازه $2\delta_0$ فشرده شده است بنابراین نیروی آن فنر برابر



$F_{فنر} = k\Delta = \frac{2\delta_0 EA}{L}$ می‌باشد

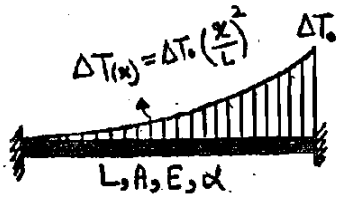
از طرفی میله باتوجه به شکل به اندازه $3\delta_0$ افزایش طول داشته است

$$\Delta = 3\delta_0 \Rightarrow \alpha\Delta T L - \frac{F}{EA} \times \frac{L}{EA} = 3\delta_0$$

$$\Rightarrow \alpha\Delta T L - \frac{2\delta_0 EA}{L} \times \frac{L}{EA} = 3\delta_0 \Rightarrow \alpha\Delta T L = 5\delta_0 \rightarrow \boxed{\Delta T = \frac{5\delta_0}{\alpha L}}$$

سراسری ۸۵

۵۶- میله‌ای را که بین دو تکیه گاه ثابت قرار دارد مطابق شکل بطور یکنواخت حرارت داده ایم، مقدار تنش عمودی در میله برابر **با:**



۱) $E\alpha\Delta T_0$

۲) $\frac{E\alpha\Delta T_0}{2}$

۳) $\frac{E\alpha\Delta T_0}{3}$

۴) $\frac{E\alpha\Delta T_0}{4}$

در اثر حرارت میله منبسط می شود ولی تکیه گاهها با اعمال نیروی فشاری مانع از افزایش طول آن می شوند. اگر عکس العمل تکیه گاه سمت چپ را برابر R درنظر گیریم:

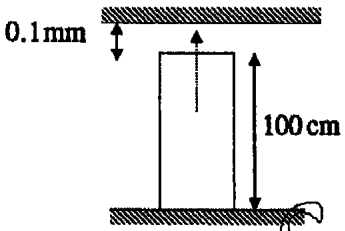
$$\left.\begin{aligned} P_{\text{المان}} &= -R \\ \Delta T_{\text{المان}} &= \Delta T_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2 \\ \delta_{\text{المان}} &= \frac{\left(P_{\text{المان}}\right)dx}{EA} + \alpha\left(\Delta T_{\text{المان}}\right)dx = -\frac{Rdx}{EA} + \alpha\Delta T_0\left(\frac{x}{L}\right)^2 dx \end{aligned}\right\}$$

تغییر مکان انتهای سمت چپ را محاسبه کرده و برابر صفر قرار می دهیم:

$$\Delta = \int -\frac{Rdx}{EA} + \alpha\Delta T_0\left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = \int -\frac{R}{EA} + \alpha\Delta T_0\left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = -\frac{RL}{EA} + \frac{\alpha\Delta T_0 L}{3} = 0 \rightarrow \sigma = \frac{R}{A} = \frac{E\alpha\Delta T_0}{3}$$

تمرین: آزاد ۹۳

۵۹- چنانچه میله مقابل 30 درجه گرم شود، تنش ایجاد شده در آن چقدر است؟



$\alpha = 17\times10^{-6}$

$E = 110000$

۱) $45.1\ kg/cm^2$

۲) $4.51\ kg/cm^2$

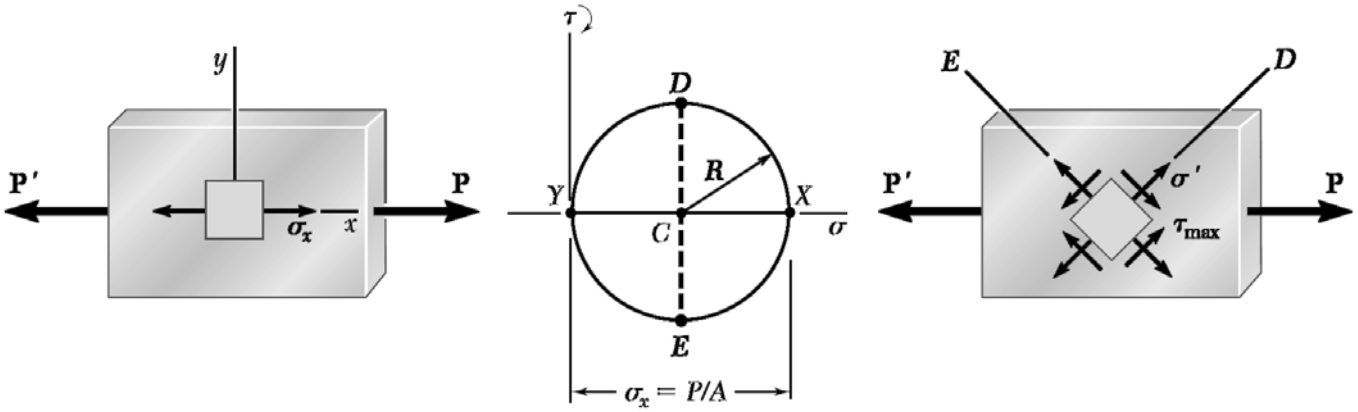
۳) $66.2\ kg/cm^2$

۴) $6.62\ kg/cm^2$

Sanjesh3.org

۷-دایره مورتنش (2D)

المان تنش چیست؟

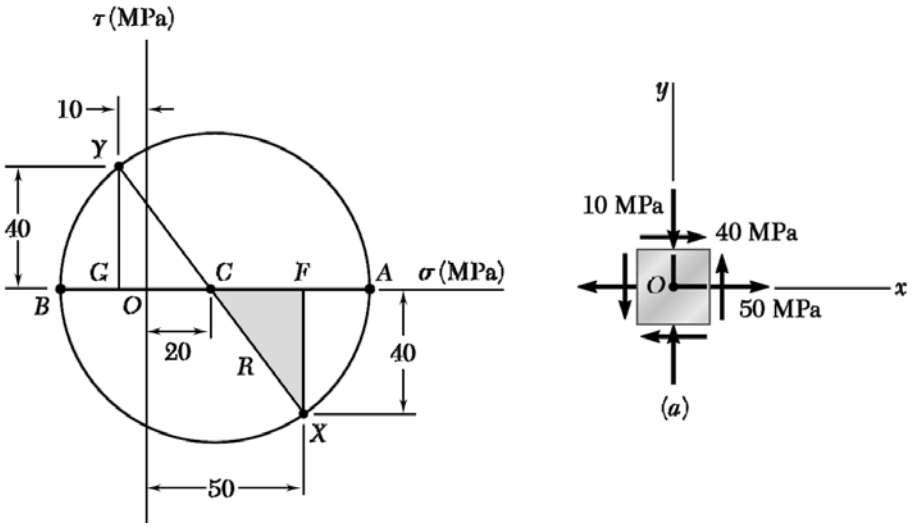


τ_{xy}, τ_{yx} چه فرقی دارند و علامتشان چگونه تعیین می شود؟

- تنش برشی اگر ساعت گرد باشد مثبت خواهد بود.

اگر المان مربعی شکل سمت راست را در نظر بگیرید، چهار صفحه داریم. این صفحات را با محور نرمال آنها اسم گذاری می کنیم. برای مثال در شکل سمت راست از این چهار صفحه دوتای آنها بر محور x عمود است. این دو صفحه را که عمود بر محور x ها می باشد صفحه x می نامیم. در این دو صفحه تنش محوری کششی برابر با 50MPa می باشد (شکل سمت راست). همینطور در این صفحه تنش برشی برابر با 40MPa (نسبت به مرکز المان) و پادساعت گرد می باشد.

بنابراین هر صفحه از المان در فضای دو بعدی دارای دو تنش خواهد بود: ۱- تنش محوری (کششی مثبت) ۲- تنش برشی (ساعت گرد مثبت).



برای رسم دایره مور به شرح زیر عمل می کنیم:

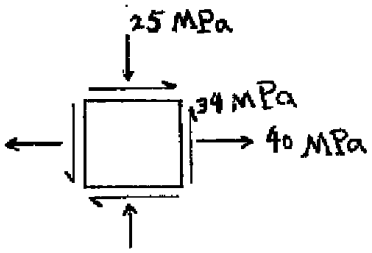
نقاط X و Y را در شکل سمت چپ در بالا در نظر بگیرید. مختصات نقطه X برابر (50,-40) می باشد که همان تنش محوری و برشی در المان مربعی برای صفحه X می باشد. از طرفی مختصات نقطه Y در دایره برابر (-10,+40) می باشد که مربوط به تنش محوری و برشی در المان مربعی در صفحه Y می باشد.

مرکز دایره مور؟

شعاع دایره مور؟

سراسری ۹۲- دکتری

۲- اگر مختصات طولی مرکز دایرهٔ مور، متناظر با وضعیت تنش نشان داده شده x و شعاع دایره R باشد، نسبت $\frac{R}{x}$ چقدر است؟

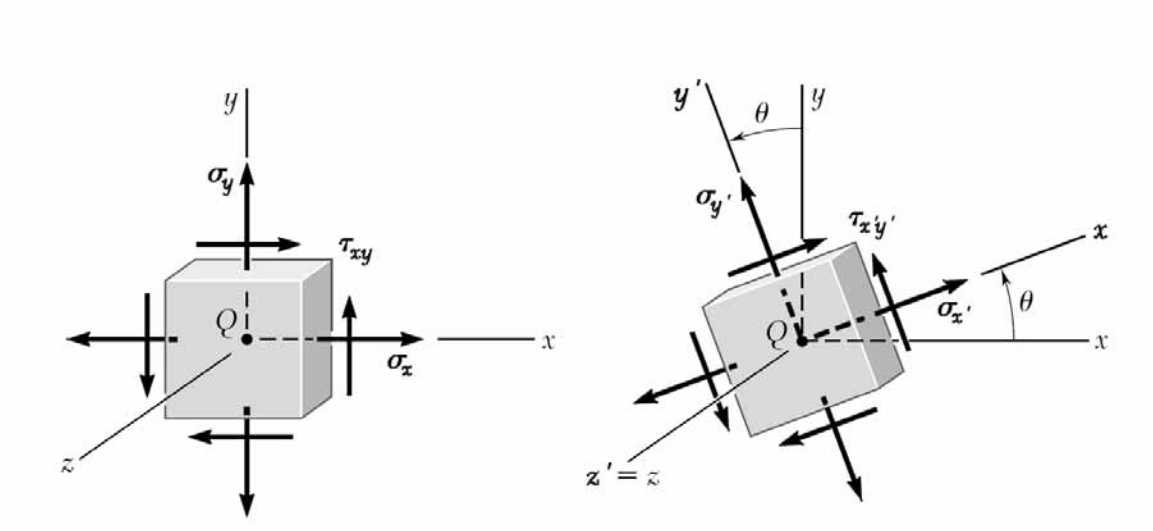


۱) ۱/۰۷۱
۲) ۴/۶۴۲
۳) ۱/۶۷۸
۴) ۶/۲۷۱

زوایا در دایره مور؟

-زاویه ها در دایره مور دو برابر هستند (مثلثاتی مثبت)

تنش های اصلی؟



$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$
$$\sigma_{x'} \times \sigma_{y'} - \tau^2_{x'y'} = \sigma_x \times \sigma_y - \tau^2_{xy}$$

مثال

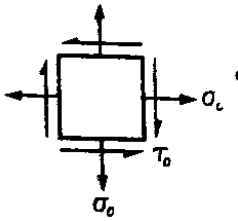
اگر در نقطه‌ای از یک سازه تحت اثر بارگذاری مؤلفه‌های تنش بصورت $\tau_{xy} = -۳۰$ و $\sigma_x = ۲\sigma_y = ۲۰$ باشد، در این نقطه مجموع تنشهای اصلی چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۱۰

۳) ۲۰ ۴) ۳۰ ✓

مثال

۱۲۹ـ در المان تنش زیر مقادیر تنشهای اصلی چقدر است؟



۱) $\sigma_0 - \frac{\tau_0}{۲}$ و $\sigma_0 + \frac{\tau_0}{۲}$ ۲) $\sigma_0 - \tau_0$ و $\sigma_0 + \tau_0$ ✓

۳) τ_0 و $۲\sigma_0 - \tau_0$ ۴) σ_0 و σ_0

در تنش های اصلی تنش برشی صفر است. بنابراین اگر σ_1, σ_2 تنش های اصلی باشند:

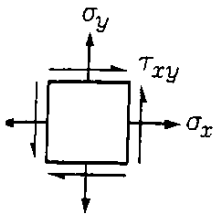
$$\begin{cases} \sigma_0 + \sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2 \rightarrow \sigma_1 = 2\sigma_0 - \sigma_2 \\ \sigma_0^2 - \tau_0^2 = \sigma_1 \sigma_2 \end{cases} \rightarrow \sigma_0^2 - \tau_0^2 = (2\sigma_0 - \sigma_2)\sigma_2$$

$$\rightarrow \sigma_0^2 - 2\sigma_0\sigma_2 + \sigma_2^2 = \tau_0^2 \rightarrow (\sigma_0 - \sigma_2)^2 = \tau_0^2$$

$$\rightarrow \sigma_0 - \sigma_2 = \pm\tau_0 \rightarrow \boxed{\sigma_2 = \sigma_0 \pm \tau_0} \rightarrow \text{گزینه ۲}$$

مثال

در یک المان تنش دو بعدی مانند شکل زیر حاصل $\sigma_x + \sigma_y$ چقدر خواهد شد؟



۱) σ_{max}
۲) σ_{min}
۳) $\sigma_{max} + \sigma_{min}$ ✓
۴) $\sigma_{max} - \sigma_{min}$

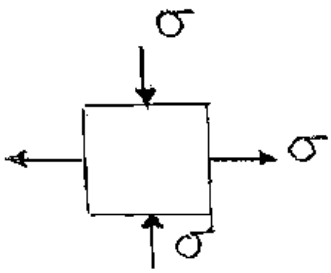
مثال

در تست قبل حاصل $\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2$ چقدر خواهد شد؟

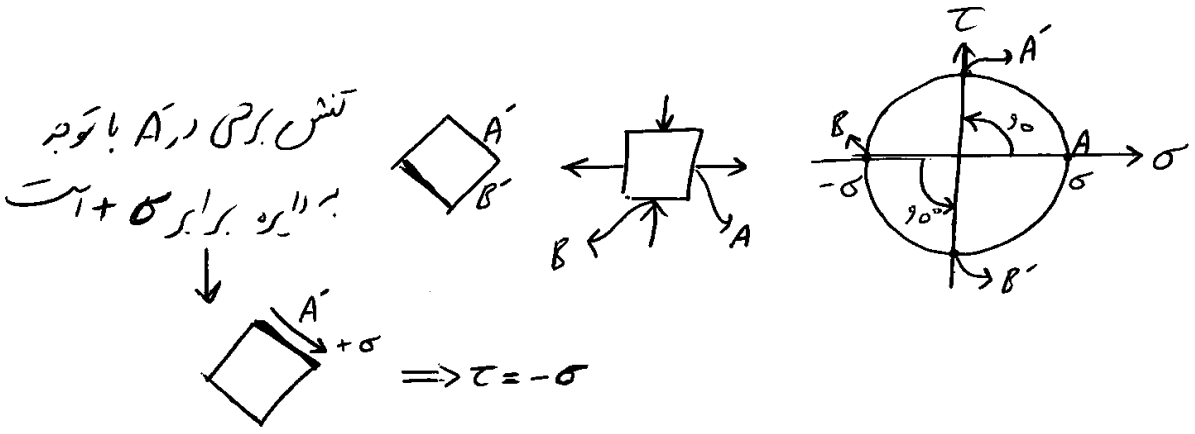
۱) $\sigma_{max} \times \sigma_{min}$ ✓
۲) $\sigma_{max}^2 + \sigma_{min}^2$
۳) $\sigma_{max}^2 - \sigma_{min}^2$
۴) $(\sigma_{max} - \sigma_{min})^2$

سراسری ۸۶

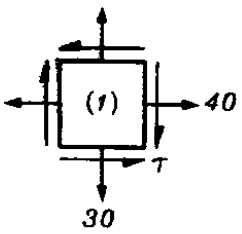
۵۰- دو شکل روبرو تنش‌ها را در یک نقطه نشان می‌دهند اضلاع دو المان ۴۵ درجه نسبت بهم زاویه دارند. در حقیقت دو المان معادل هستند بنابراین:

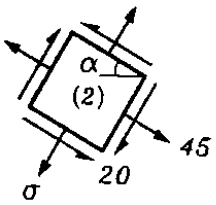


۱) $\tau_1 = \tau_2 = 0$
۲) $\tau_1 = \tau_2 = \sigma$
۳) $\tau_1 = \tau_2 = 2\sigma$
۴) $\tau_1 = \tau_2 = -\sigma$



در شکل زیر اگر المان اول را به میزان α در جهت ساعتگرد بچرخانیم المان دوم حاصل می‌شود. مقادیر σ و τ بترتیب کدامند؟





۱) $\sigma = ۲۰$ و $\tau = ۲۶/۵$

۲) $\sigma = ۲۵$ و $\tau = ۲۱/۸$ ✓

۳) $\sigma = ۳۰$ و $\tau = ۱۵/۸$

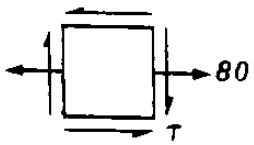
۴) بدون اینکه زاویه α مشخص باشد نمی‌توان مقادیر σ و τ را محاسبه کرد.

$40 + 30 = 45 + \sigma \rightarrow \sigma = 25$

$40 \times 30 - \tau^2 = 45 \times 25 - 20^2 \Rightarrow \tau = 21.8$

مثال

۱۲۸ـ تنشهای وارده در یک نقطه از سازه‌ای در المان تنش زیر نشان داده شده است. اگر اگر مقدار تنش اصلی کششی برابر $۱۴۰ MPa$ باشد، تنش برشی ماکزیمم چقدر است؟



۱) $۸۰ MPa$ ۲) $۱۰۰ MPa$ ✓

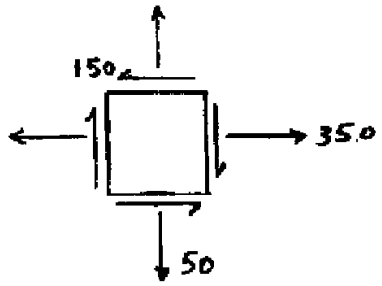
۳) $۱۲۰ MPa$ ۴) بستگی به مقدار τ دار

$$80 + 0 = 140 + \sigma_{min} \rightarrow \sigma_{min} = -60MPa$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{140 - (-60)}{2} = 100MPa$$

سراسری ۹۲- دکتری

۳- وضعیت تنش در یک نقطه از جسمی به صورت مقابل است (واحد تنش‌ها MPa). وضعیت اصلی تنش نسبت به وضعیت نشان داده شده با دوران ..... درجه در جهت ..... حاصل می‌شود.



۱) ۲۲/۵+ پاد ساعتگرد

۲) ۴۵ ـ ساعتگرد

۳) ۴۵ + پاد ساعتگرد

۴) ۶۷/۵+ پاد ساعتگرد

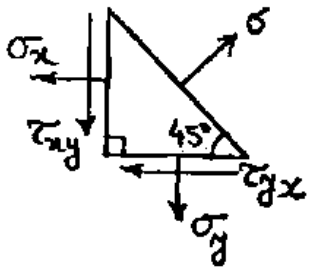
سراسری ۹۱- دکتری

۷- میله‌ای تحت تنش تک محوره کششی σ قرار دارد. در صفحه‌ای که تنش عمودی در آن $\frac{\sigma}{۴}$ است، تنش برشی چقدر است؟

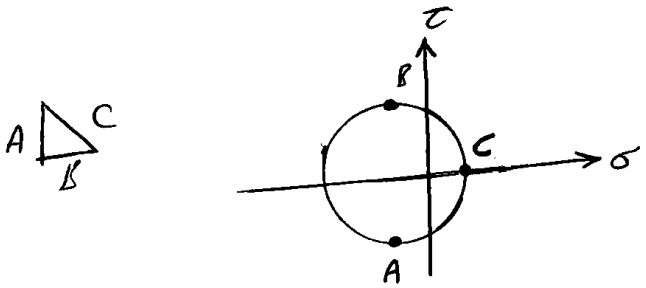
۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}\sigma$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sigma$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}\sigma$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sigma$

سراسری ۸۵

۵۳- در نقطه‌ای از یک سازه تنش‌ها مطابق شکل روبرو است. $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ چقدر است؟



۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) هر مقداری امکان دارد.



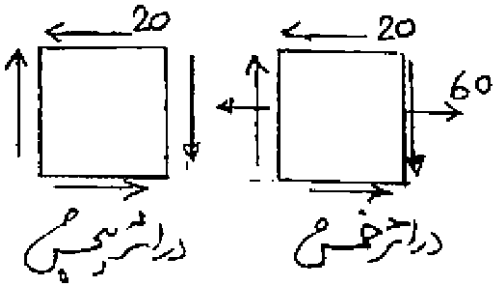
$\sigma_A = \sigma_B \rightarrow \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = 1$

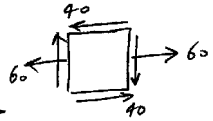
سراسری ۸۸

۵۹- در یک نقطه از سازه‌ای در اثر پیچش تنش برشی ۲۰ MPa و در اثر خمش تنش برشی ۲۰ MPa و تنش عمودی ۶۰ MPa مطابق شکل موجود است.

بزرگترین تنش برشی و تنش‌های اصلی بر حسب MPa چقدر است؟

۱) ۴۰ برشی و ۶۰ کششی و ۲۰ فشاری
۲) ۴۰ برشی و ۴۰ کششی و ۴۰ فشاری
۳) ۴۰ برشی و ۲۰ کششی و فشاری
۴) ۵۰ برشی و ۸۰ کششی و ۲۰ فشاری





اگر خمش و پیچش همزمان وارد شوند، المان به صورت خواهد بود.

محاسبه تنش های اصلی ($\tau = 0$):

$$\begin{cases} 60+0 = \sigma_1+\sigma_2 \\ 60\times 0 - 40^2 = \sigma_1 \times \sigma_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \sigma_1 = 80 \\ \sigma_2 = -20 \end{matrix}$$

محاسبه تنش برشی ماکزیمم:

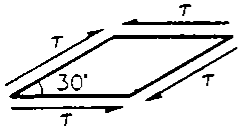
$$\tau = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} = 50$$

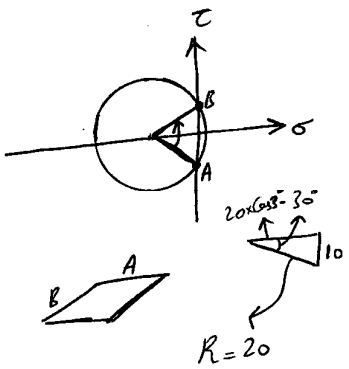
سراسری ۸۰

در یک نقطه از سازه‌ای، المانی مطابق شکل نشان داده شده‌است. روی صفحات نشان داده شده، تنش برشی مساوی $۱۰ MPa$ و تنش عمودی صفر است. مقادیر تنشهای اصلی $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ برحسب MPa چقدر است؟ (در این نقطه تنش مسطح است)

۱) ۱۰ و ۱۰− ۲) ۲۰ و ۰

۳) ۱۶٫۹۳ و ۱۰٫۶۵ ۴) $۱۰\sqrt{۳}+۲۰$ و $۱۰\sqrt{۳}-۲۰$





$\Longrightarrow \sigma_{max} = 20 - 20\times\cos 30^\circ = 20 - 10\sqrt{3}$

$\sigma_{min} = -20 - 20\times\cos 30^\circ = -20 - 10\sqrt{3}$

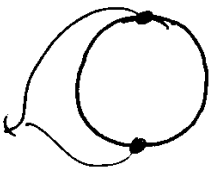
→ تیت منفی است گزینه ۴ نیست

سراسری ۸۵

۵۴- در نقطه‌ای از یک جسم، مولفه‌های تنش بصورت $\sigma_x = ۶$ ، $\tau_{xy} = \tau_{yx} = ۴$ و سایر مولفه‌ها برابر صفر می‌باشند. روی صفحه‌ای که از آن نقطه می‌گذرد و مولفه تنش برشی مقدار ماکزیمم را دارد مقدار مؤلفه تنش عمودی چقدر می‌باشد؟

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۲- ۴) ۸

وقتی تنش برشی ماکزیمم است



این نقاط را داریم که در آنها $\sigma = \sigma_x = \sigma_y$

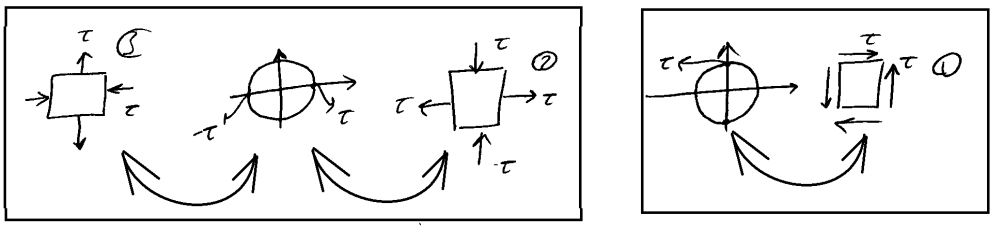
$$\begin{cases} 6+0 = \sigma+\sigma \rightarrow \sigma = 3 \\ 6\times 0 - 4^2 = \sigma^2 - \tau^2 \rightarrow \tau = \pm 5 \end{cases}$$

المان هایی که در آنها برش محض داریم؟

مثال

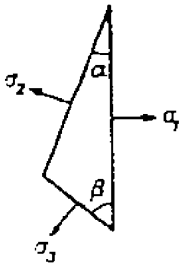
کدامیک از تانسورهای زیر می‌تواند مربوط به حالت برش محض باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & -\tau \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -\tau & 0 \\ 0 & \tau \end{bmatrix}$ ۴) همه موارد ✓



آزاد ۸۷

۵۱- در المان زیر که تنشهای برشی روی صفحات نشان داده شده صفر است، کدام گزینه صحیح می باشد؟



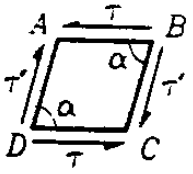
۱) $\sigma_1 = \frac{\sigma_2}{Sin\alpha} = \frac{\sigma_3}{Sin\beta}$ ۲) $\sigma_1 = \sigma_2 Sin\alpha = \sigma_3 Sin\beta$

۳) $\frac{\sigma_1}{Sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sigma_2}{Sin\alpha} = \frac{\sigma_3}{Sin\beta}$ ۴) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

مثال

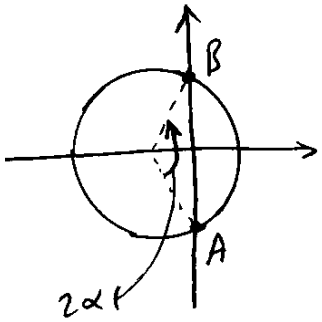
اگر به جای المان مربعی، المان لوزی مطابق شکل زیر در نظر گرفته شود،

رابطه $\tau = \tau'$ به چه رابطه‌ای تغییر می‌کند؟



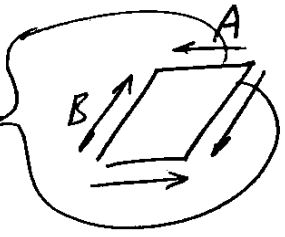
۱) $\tau = \tau' \sin\alpha$ ۲) $\tau' = \tau \sin\alpha$

۳) $\tau' = \tau \sin^2\alpha$ ۴) رابطه تغییر نمی‌کند. ✓



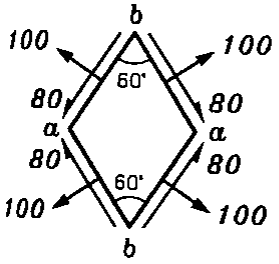
$\tau_A = \tau_B$

تنش محوری صفر است پس:



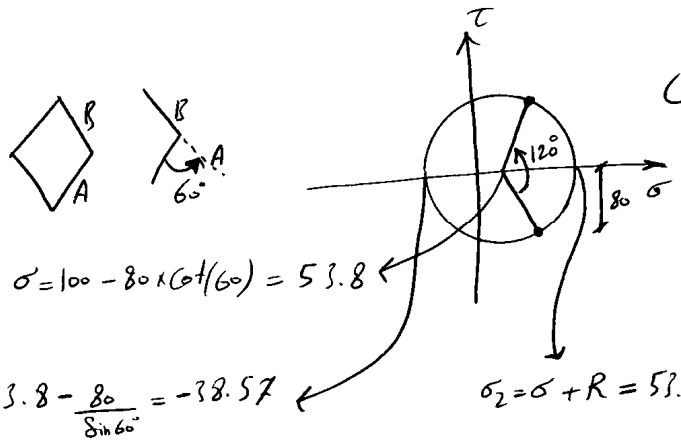
مثال

۱۳۲ـ در المان تنش زیر مقادیر تنشهای اصلی چقدر است؟



۱) ۵۳٫۸– و ۱۳۱ ۲) ۵۰– و ۱۵۰

۳) ۳۸٫۶– و ۱۴۶٫۲ ۴) ۳۲٫۴– و ۱۵۲٫۴



چون زوایا ۹۰ نیستند، مانند شکل قبل نمی‌توان از روابط استفاده کرد و باید از دایره مور استفاده کرد:

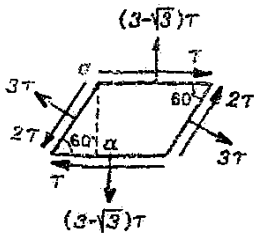
$\sigma = 100 - 80\times\cot(60) = 53.8$

$\sigma_1 = \sigma - R = 53.8 - \frac{80}{\sin 60^\circ} = -38.57$

$\sigma_2 = \sigma + R = 53.8 + \frac{80}{\sin 60^\circ} = 146.17$

آزاد۸۹

۴۴– در المان تنش زیر مقدار تنش نرمال در صفحهٔ قائم a-a چقدر است؟



۱) $(2+\sqrt{3})\tau$ ۲) $(1+\sqrt{3})\tau$

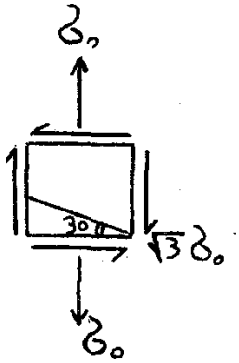
۳) $(3+\sqrt{3})\tau$ ۴) $(4+\sqrt{3})\tau$

$$\sigma + (3-\sqrt{3})\tau = 3\tau + \sigma' \rightarrow \sigma' = \sigma - \sqrt{3}\tau$$

$$\sigma \times (3-\sqrt{3})\tau - \tau^2 = 3\tau \times \sigma' - 4\tau^2$$

$$\sigma \times (3-\sqrt{3})\tau - \tau^2 = 3\tau \times (\sigma - \sqrt{3}\tau) - 4\tau^2 \rightarrow \sigma \times (-\sqrt{3}\tau) = (-3\sqrt{3}-3)\tau^2 \rightarrow \sigma = (3+\sqrt{3})\tau$$

آزاد ۹۲



۴۵- در المان نشان داده شده تنش عمودی در صفحه‌ای که با راستای افق زاویه ۳۰ درجه می‌سازد کدام است؟

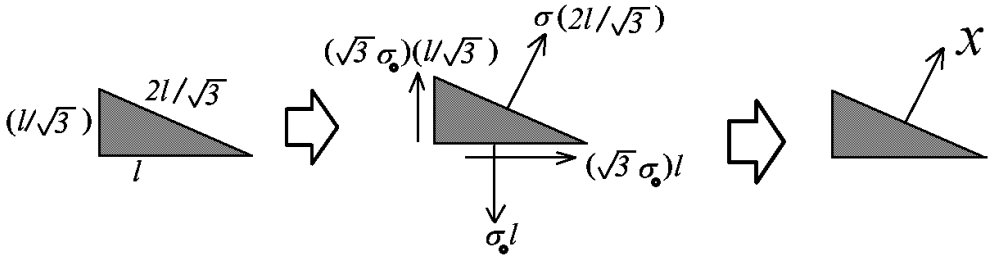
۱) $\frac{3}{4}\sigma_0$ کششی

۲) $\frac{3}{4}\sigma_0$ فشاری

۳) $\frac{2}{5}\sigma_0$ کششی

۴) $\frac{2}{5}\sigma_0$ فشاری

گزینه ۲

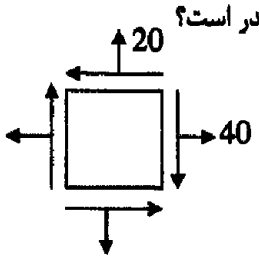


برآیند نیروها را در راستای X می نویسیم:

$$\sigma\left(\frac{2l}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{3}\sigma_0\frac{l}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\sigma_0(l)\times\frac{1}{2}-\sigma_0 l\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

$$\sigma(2l)+\sigma_0 l\times\frac{3}{2}+\sigma_0(l)\times\frac{3}{2}-\sigma_0 l\times\frac{3}{2}=0 \quad\rightarrow\quad \sigma=-\frac{3}{4}\sigma_0$$

تمرین: آزاد ۹۳



۵۰- در المان زیر در صورتی که $\delta_{min}=\frac{1}{4}\delta_{max}$ باشد، تنش برشی ماکزیمم چقدر است؟

۱) 20kpa

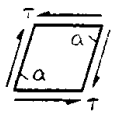
۲) 60kpa

۳) 18kpa

۴) 24kpa

تمرین:

در یک نقطه از سازه‌ای، المان تنش مطابق شکل زیر است. مقدار تنش برشی ماکزیمم چقدر است؟

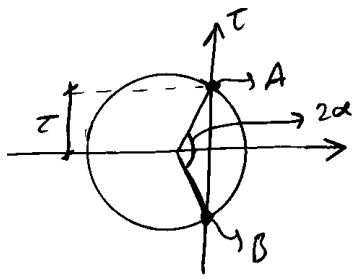


۱) τ

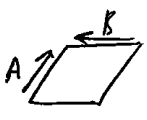
۲) $\tau\sin\alpha$

۳) $\frac{\tau}{\sin\alpha}$

۴) $\tau\tan\frac{\alpha}{2}$

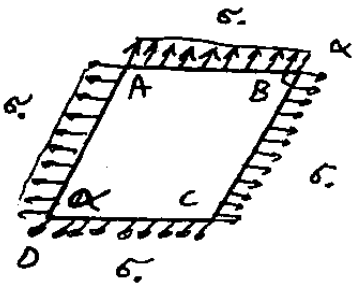


$\tau_{max}=R=\frac{\tau}{\sin\alpha}$ تنش برشی ماکزیمم برابر شعاع دایره است



آزاد ۸۵

۷۱- مطابق شکل زیر المان متوازی الاضلاع ABCD تحت اثر تنش کششی σ_0 می باشد. تنش برشی ماکزیمم در صفحه این المان چقدر است؟

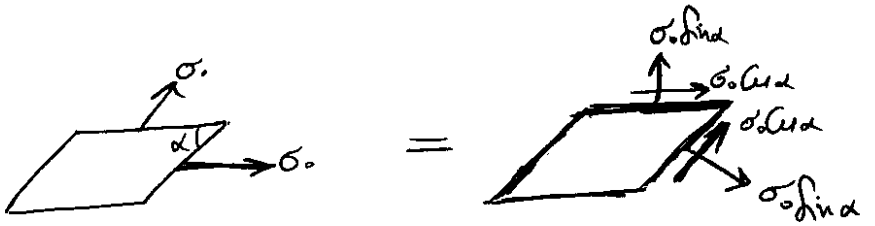


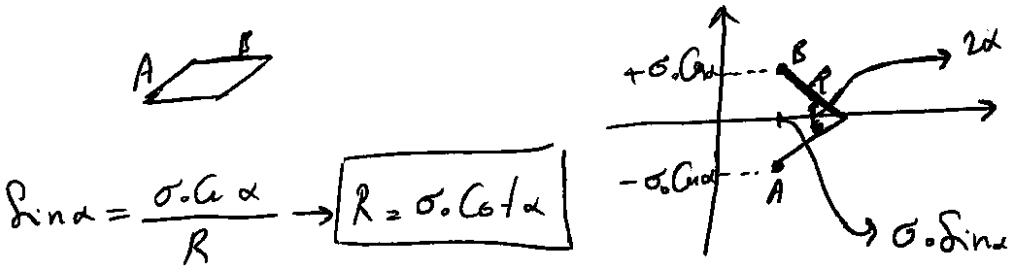
۱) $\sigma_0 \, Cos\alpha$

۲) $\sigma_0 \, Cos^2\alpha$

۳) $\sigma_0 \, Cotg^2\alpha$

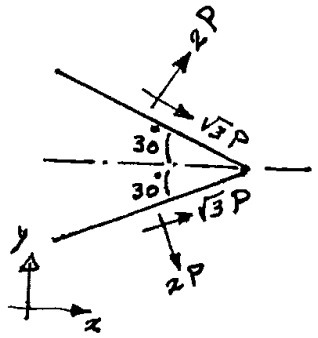
۴) $\sigma_0 \, Cotg\alpha$





سراسری ۹۲

۵۲- تنش‌ها در یک نقطه از سازه بر روی دو صفحهٔ مطابق شکل نشان داده شده است. مؤلفه‌های تنش بر روی صفحهٔ عمودی، کدام است؟



۱) $\sigma_x = 5P \, , \, \tau_{xy} = -p$

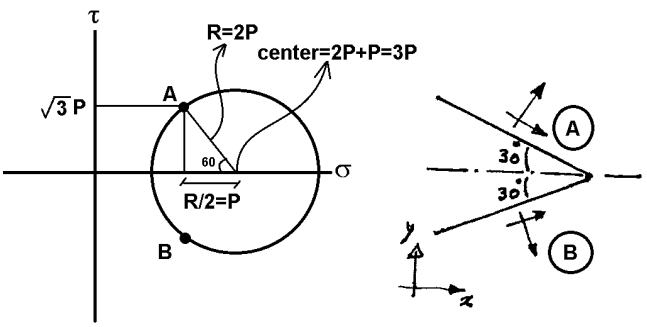
۲) $\sigma_x = 5P \, , \, \tau_{xy} = 0$

۳) $\sigma_x = 5P \, , \, \tau_{xy} = p$

۴) $\sigma_x = 8P \, , \, \tau_{xy} = 0$

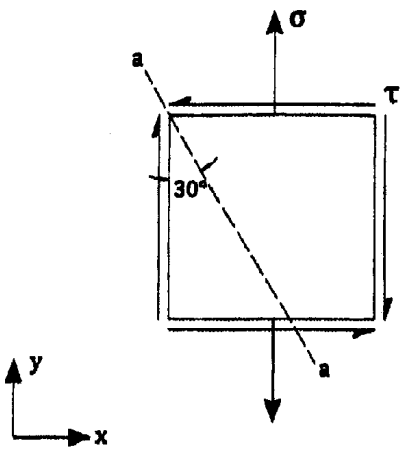
گزینه ۲.

اگر مطابق شکل دایره مور المان را رسم کنیم، مشاهده می شود که با چرخش ۶۰ درجه از صفحه A (۱۲۰ درجه در دایره مور) به صفحه قائم (تنش اصلی حداکثر در دایره مور) در شکل می رسیم. بنابراین تنش برشی آن صفر و تنش محوری آن برابر $\sigma = \sigma_{cenetr} + R = 3P + 2P = 5P$ می باشد.



سراسری ۹۳

۵۲- مؤلفه‌های تنش در نقطه‌ای از سازه در صفحه xy مطابق شکل می‌باشد. چنانچه صفحه a-a صفحه‌ای با تنش‌های اصلی حداقل باشد، نسبت $\left|\frac{\sigma}{\tau}\right|$ چقدر است؟



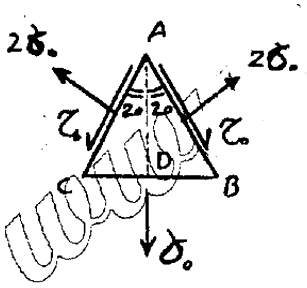
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

آزاد ۹۱



۴۳- در المان نشان داده شده تنش برشی در راستای AD کدام است؟

۱) σ_0

۲) $2\sigma_0$

۳) $4\sigma_0$

۴) صفر

گزینه ۴

در صفحه CB تنش برشی صفر است و بنابراین صفحه CB صفحه اصلی می باشد. صفحه AD نیز که عمود بر صفحه CB است، یک صفحه اصلی خواهد بود. (صفحات اصلی بر هم عمودند). بنابراین در صفحه AD نیز تنش برشی صفر است.

سراسری ۹۴

۴۶- بر روی سطح دیواری مقادیر کرنش در دو امتداد متعامد برابر $\varepsilon_x = ۰/۰۰۰۶$ و $\varepsilon_y = -۰/۰۰۱۲$ اندازه‌گیری شده است. با فرض رفتار الاستیک خطی و اینکه بر روی سطح دیوار مزبور بار خارجی وارد نمی‌شود ($\sigma_z = ۰$)، مقدار کرنش در جهت عمود بر سطح دیوار چقدر است؟ ضریب پواسون برابر ۰/۲۵ و مدول ارتجاعی برابر ۲۰ MPa در نظر گرفته شود.

۱) $-۰/۰۰۰۴$

۲) صفر

۳) $۰/۰۰۰۲$

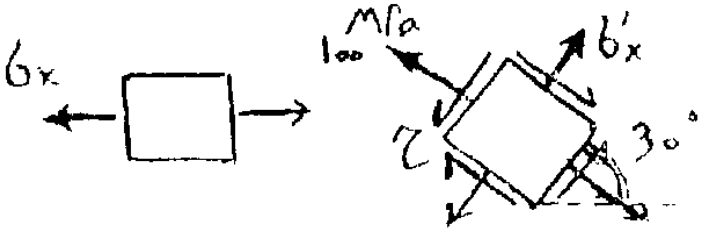
۴) $۰/۰۰۰۴$

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - v\frac{\sigma_y}{E} = -0.0012\\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - v\frac{\sigma_x}{E} = 0.0006\end{aligned}\right\} \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1-v} = \frac{-0.0006}{0.75}$$

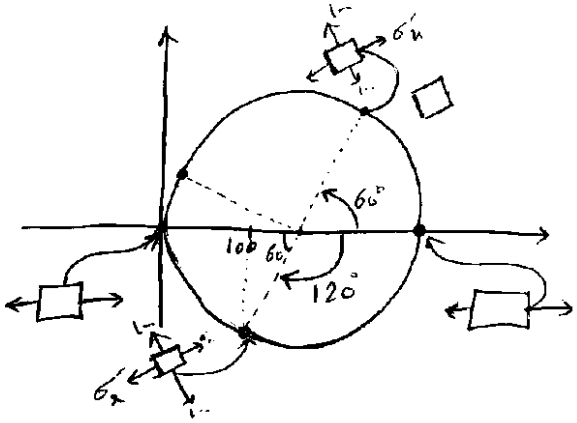
$$\varepsilon_z = -v\left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}\right) = -0.25\frac{-0.0006}{0.75} = 0.0002$$

آزاد ۹۰

۴۷ - دو المان نشان داده شده وضعیت تنش‌ها را در یک نقطه از سازه بر اثر یک نوع بارگذاری نشان می‌دهند تنش برشی حداکثر در این نقطه کدام است؟



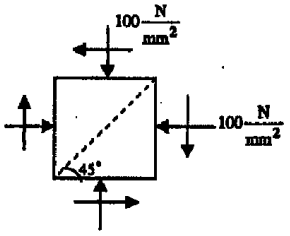
۱) 200 MPa
۲) 100 MPa
۳) 300 MPa
۴) 50 MPa



$$R - R\cos 60^\circ = 100$$
$$\rightarrow R\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 100$$
$$\rightarrow R = 200$$
$$\rightarrow \tau_{max} = R = 200\,MPa$$

تمرین: آزاد ۹۳

۴۲- برای المان مربع شکل مقابل درتنش محوری و برش بر روی صفحه قطری ab برابر صفر است. تنش T_{xy} کدام است؟



۱) $50\frac{N}{mm^2}$
۲) $100\frac{N}{mm^2}$
۳) $125\frac{N}{mm^2}$
۴) $150\frac{N}{mm^2}$

تمرین: آزاد ۹۳

۴۳- تانسور تنش المانی به صورت زیر است، تنش‌های اصلی و برش ماکزیمم کدام است؟

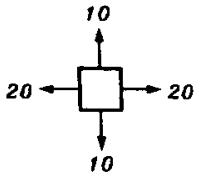
$$\begin{bmatrix} 14 & -5 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}$$

۱) $\tau_{Max} = 2.5 \,,\ \delta_2 = -10kpa \,,\ \delta_1 = 15kpa$
۲) $\tau_{Max} = 13kpa \,,\ \delta_2 = -10kpa \,,\ \delta_1 = 15kpa$
۳) $\tau_{Max} = 13kpa \,,\ \delta_2 = -11kpa \,,\ \delta_1 = 15kpa$
۴) $\tau_{Max} = 2 \,,\ \delta_2 = -11kpa \,,\ \delta_1 = 15kpa$

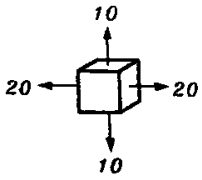
۸-دایره مورتنش (3D)

مثال

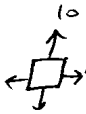
در المان زیر تنش برشی ماکزیمم چقدر است؟



۱) ۵ ✓
۲) ۱۰
۳) ۱۵
۴) ۲۰

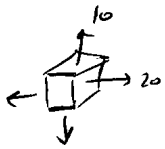


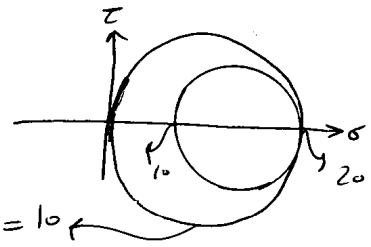
۱) ۵
۲) ۱۰ ✓
۳) ۱۵
۴) ۲۰



$10+20=2\sigma \rightarrow \sigma=15$

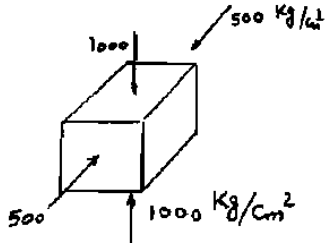
$10\times 20=\sigma^2-\tau^2 \rightarrow \tau=5$



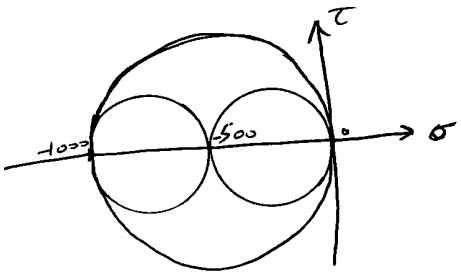


سراسری ۸۱

۴۳- به یک المان مکعبی شکل از یک جسم، تنشهای محوری دوبعدی مطابق شکل اعمال شده است. حداکثر تنش برشی در این مکعب چند کیلوگرم بر سانتی‌متر مکعب می‌باشد؟

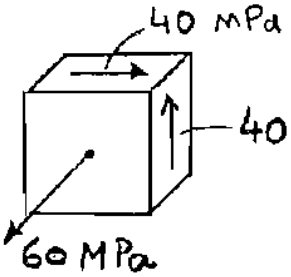


۱) ۲۵۰
۲) ۵۰۰
۳) ۷۵۰
۴) ۱۰۰۰



$$\tau=\frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2}=\frac{0-(-1000)}{2}=500$$

سراسری ۸۲



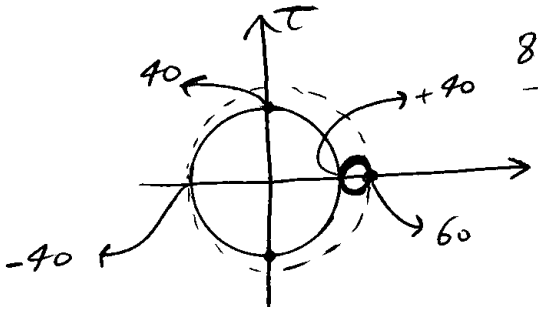
۳۹- در المان شکل روبرو تنش های اصلی بر حسب MPa چقدر می باشند؟

۱) ۸۰ ، صفر، ۲۰-

۲) ۴۰- ، ۴۰ ، ۶۰

۳) ۶۰ ، ۴۰ ، ۴۰

۴) ۸۰ ، ۶۰ ، صفر

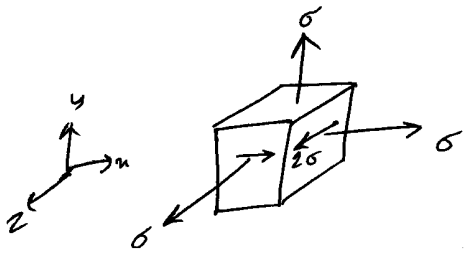


گزینه ۲ — سراسری 82

(آزاد ۸۳)

۲۲- تانسور تنش در نقطه ای از سازه بصورت $[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix}\sigma & 0 & 2\sigma\\ 0 & \sigma & 0\\ 2\sigma & 0 & \sigma\end{bmatrix}$ می باشد. تنشهای اصلی در آن نقطه کدامند؟

۱) $3\sigma,\sigma_0-\sigma$ ۲) $\sigma,0,\sigma$ ۳) σ,σ,σ ۴) $2\sigma,2\sigma_0-\sigma$

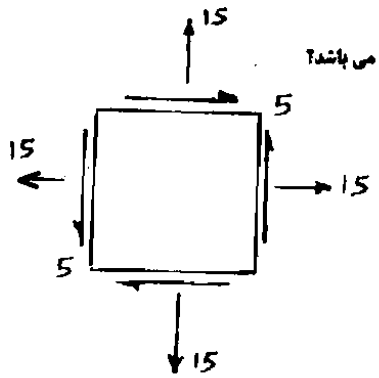


(گزینه ۱)

در صفحه xz:

$\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=2\sigma\\ \sigma_1\sigma_2=\sigma^2-4\sigma^2=-3\sigma^2\end{cases}$ ← $\begin{cases}\sigma_1=3\sigma\\ \sigma_2=-\sigma\end{cases}$, $\sigma_2=\sigma$

تمرین: سراسری ۸۳



۵۶- وضعیت تنش در یک المان مطابق شکل روبرو می باشد. مقدار تنش برشی حداکثر مطلق در نقطه مورد نظر چه مقدار می باشد؟

۱) ۰

۲) ۵

۳) ۱۵

۴) ۱۰

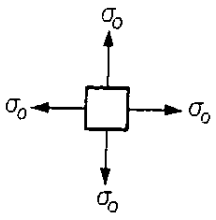
تنش برشی حداکثر مطلق را خواسته است (سه بعدی)

$\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=30\\ \sigma_1\sigma_2=15^2-5^2=200\end{cases}\rightarrow \sigma_1=10,\ \sigma_2=20$

$\Rightarrow \tau_{max}=\frac{20-0}{2}=10$

تمرین:

در المان زیر تنش برشی ماکزیمم در صفحه المان و تنش برشی ماکزیمم واقعی کدامند؟

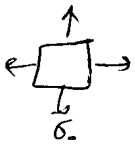


۱) σ_0 و σ_0

۲) σ_0 و ۰

۳) ۰ و $\frac{\sigma_0}{2}$

۴) $\frac{\sigma_0}{2}$ و $\frac{\sigma_0}{2}$



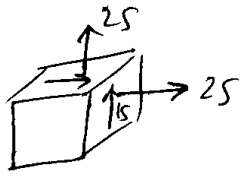
در صفحه المان $\tau_{max} = \frac{\sigma_0 - \sigma_0}{2} = 0$ ✓ واقعی $\tau_{max} = \frac{\sigma_0 - 0}{2} = \frac{\sigma_0}{2}$ ✓

تمرین:

تانسور تنش در نقطه‌ای از یک سازه بصورت $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۲۵ & ۱۵ & ۰ \\ ۱۵ & ۲۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} MPa$ می‌باشد.

در این نقطه مقدار تنش برشی ماکزیمم چقدر است؟

۱) $۱۰MPa$ ۲) $۱۵MPa$ ۳) $۲۰MPa$ ✓ ۴) $۲۵MPa$



$\sigma_1 + \sigma_2 = 50$

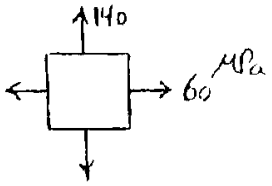
$\sigma_1 \sigma_2 = 25^2 - 15^2 = 400$

$\Leftarrow \sigma_1 = 40, \sigma_2 = 10 \Rightarrow \tau_{max} = \frac{40 - 0}{2} = 20$

تمرین: آزاد ۹۰

۴۶- در المان کرنش مسطح (Plane strain) نشان داده شده حداکثر تنش برش کدام است؟

$(V = 0.25, E = 200GPa)$



۱) 30 MPa

۲) 40 MPa

۳) 45 MPa

۴) 70 MPa

گفته کرنش مسطح یعنی ε_z (عمود بر صفحه) صفر است

$\varepsilon_z = (\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y)/E = 0 \Rightarrow (\sigma_z - 0.25 \times 60 - 0.25 \times 140) = 0$

تنش عمود بر صفحه که داده نشده است

$\rightarrow \sigma_z = 50$

$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{140 - 50}{2} = 45MPa$

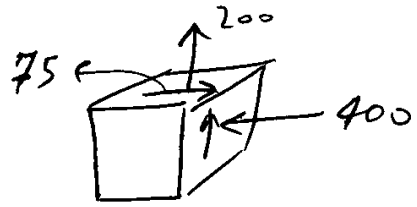
۹-دایره مورکرنش

تنها تفاوت آن با تنش: کرنش برشی را در دایره نصف درنظر می گیریم

سراسری ۸۲

۴۳- در صورتی که در یک وضعیت کرنش صفحه ای $\varepsilon_x = -400*10^{-6}$ ، $\varepsilon_y = 200*10^{-6}$ و $\gamma_{xy} = 150*10^{-6}$ باشد، مطلوبست محاسبه حداکثر کرنش برشی مطلق.

۱) $100*10^{-6}$ ۲) $200*10^{-6}$ ۳) $76*10^{-6}$ ۴) $618*10^{-6}$



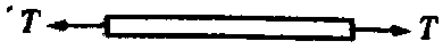
باید کرنش ها را اصلی حساب کنیم

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -200$$
$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -80000 - 75^2 = 85625$$
$$\Rightarrow \varepsilon_1 = 209.23,\ \varepsilon_2 = -409.23$$

$$\gamma_{max} = \left(\frac{209.23 - (-409.23)}{2}\right) \times 2 = 618.46$$

مثال

میله‌ای تحت اثر نیروی محوری کششی T قرار دارد. اگر کرنش محوری ε_x و ضریب پواسون ν باشد کرنش برشی ماکزیمم در میله چقدر است؟



۱) $\frac{\varepsilon_x(1-\nu)}{2}$ ۲) $\frac{\varepsilon_x(1+\nu)}{2}$ ✓

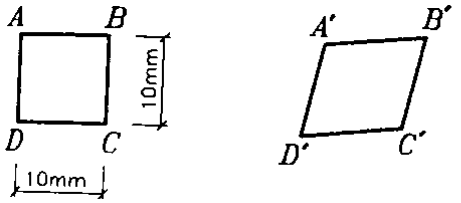
۳) $\varepsilon_x(1-\nu)$ ۴) $\varepsilon_x(1+\nu)$

$$\begin{cases} \varepsilon_n = \varepsilon_n \\ \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_n \end{cases}$$

$$\gamma_{max} = 2\left(\frac{\varepsilon_n + \nu\varepsilon_n}{2}\right) = \varepsilon_n + \nu\varepsilon_n$$

مثال

در شکل زیر المان مربع پس از بارگذاری به المان متوازی‌الاضلاع تبدیل می‌شود، بصورتیکه ضلع AB به میزان ۸ میکرومتر و ضلع AD به میزان ۴ میکرومتر افزایش طول می‌یابد، همچنین زاویه رأس A به میزان 3×10^{-4} رادیان بطور متقارن افزایش می‌یابد. کرنش برشی ماکزیمم چقدر است؟



۱) 250μ
۲) $360/6\mu$
۳) 500μ ✓
۴) $721/1\mu$

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\frac{8\times10^{-6}}{10^{-2}}=8\times10^{-4}\\ \varepsilon_y=\frac{4\times10^{-6}}{10^{-2}}=4\times10^{-4}\\ \gamma_{xy}=3\times10^{-4}\longrightarrow\varepsilon_{xy}=1.5\times10^{-4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varepsilon_1+\varepsilon_2=12\\ \varepsilon_1\varepsilon_2=32-1.5^2=29.75\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varepsilon_1=8.5\\ \varepsilon_2=3.5\end{cases}\Rightarrow\gamma=\left(\frac{8.5-3.5}{2}\right)\times2=5$$

راه حل دوم $\Rightarrow\gamma=2R=\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}\times2=5\times10^{-4}$

سراسری ۸۸

۵۷- در نقطه‌ای بر روی سطح بدنه جسمی کرنش‌های اصلی منطبق بر سطح عاری از بار جانبی خارجی برابر $\varepsilon_1=+3/5\times10^{-4}$ و $\varepsilon_2=+1\times10^{-4}$ اندازه‌گیری شده است. اگر مدول برشی برابر $G=8GPa$ و ضریب پواسون برابر ۰/۲۵ باشد، مقدار حداکثر تنش برشی در نقطه مزبور برحسب MPa چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۲/۸ ۳) ۲ ۴) ۱

تنش برشی حداکثر برابر است با:

$$\tau=\frac{\sigma_{max}-\sigma_{\min}}{2}$$

بنابراین باید تنشهای اصلی ($\sigma_{\min}$ و σ_{max}) را بیابیم:

$$\varepsilon_1=3.5\times10^{-4}=\frac{\sigma_1}{E}-v\frac{\sigma_2}{E}-v\frac{\sigma_3}{E}$$
$$\varepsilon_2=1\times10^{-4}=\frac{\sigma_2}{E}-v\frac{\sigma_1}{E}-v\frac{\sigma_3}{E}$$

از آنجا که گفته بر سطح عاری از بارخارجی پس σ_3 صفر است. با توجه به رابطه $G=\frac{E}{2(1+v)}$، مقدار E برابر 20GPa خواهد بود و داریم:

$$20\times10^9\times3.5\times10^{-4}=7\times10^6=\sigma_1-0.25\sigma_2$$
$$20\times10^9\times1\times10^{-4}=2\times10^6=\sigma_2-0.25\sigma_1$$

با حل دو معادله فوق:

$$\sigma_1=8MPa,\quad \sigma_2=4\text{MPa},\quad \sigma_3=0$$
$$\tau=\frac{\sigma_{max}-\sigma_{\min}}{2}=\frac{8-0}{2}=4\text{MPa}$$

آزاد ۹۱

۴۶- کرنش‌های اندازه‌گیری شده در دو صفحه عمود برهم یک المان صفحه‌ای برابر با ۱۰ و ۲۰ میکرواسترین می‌باشد، اگر یکی از تنش‌های اصلی در این المان ۵۰ مگاپاسکال باشد مطلوب است محاسبه تنش برشی حداکثر ایجاد شده در این المان؟ $(E = 7 \times 10^4\ MPa\ ,\ \upsilon = 0.3)$

۱) 50 MPa ۲) 80 MPa

۳) 100 MPa ۴) 120 MPa

گزینه ۳

می دانیم مجموع کرنش ها در هر دو صفحه برابر است. بنابراین جمع کرنشهای ماکزیمم و مینیمم برابر 15=2/(20+10) میکرواسترین خواهد بود. از طرفی کرنش های اصلی را می توان به شرح زیر محاسبه کرد:

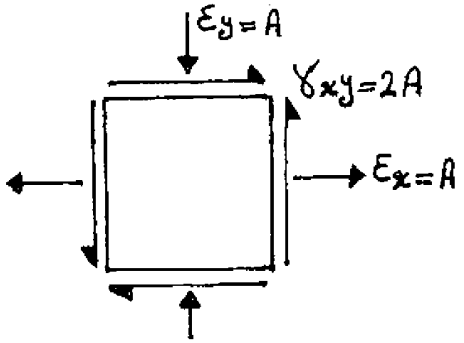
$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - 0.3\sigma_2) = \frac{1}{E}(50 - 0.3\sigma_2)\\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - 0.3\sigma_1) = \frac{1}{E}(\sigma_2 - 0.3\times 50)\end{aligned}\right\} \rightarrow \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(35 + 0.7\sigma_2) = 30 \rightarrow \sigma_2 = 250MPa$$

و بنابراین تنش برشی ماکزیمم برابر خواهد بود با:

$$\tau_{max} = \frac{(250 - 50)}{2} = 100MPa$$

سراسری ۸۸

۵۸- در المان نشان داده شده، در حالت تنش مسطح، حداکثر کرنش (تنش) برشی کدام است؟



۱) $2\sqrt{2}A$
۲) $\sqrt{2}A$
۳) $2A$
۴) $2\sqrt{3}A$

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0\\ &\varepsilon_1\varepsilon_2 = -A^2 - A^2 = -2A^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}\varepsilon_1 &= \sqrt{2}A\\ \varepsilon_2 &= -\sqrt{2}A\end{aligned} \Rightarrow \gamma_{max} = 2\left(\frac{\sqrt{2}A + \sqrt{2}A}{2}\right) = 2\sqrt{2}A$$

۱۰-گلبرگ کرنش

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_{90} + \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45}$$

مثال

کرنشهای اندازه‌گیری شده در راستای ۰° و ۴۵° و ۹۰° در یک نقطه از سازه تحت اثر یک بارگذاری بترتیب برابر $-\varepsilon_0$ و $6\varepsilon_0$ و $5\varepsilon_0$ می‌باشد. در این نقطه کرنشهای اصلی کدامند؟

۱) $-\varepsilon_0$ و $5\varepsilon_0$ ۲) $-2\varepsilon_0$ و $6\varepsilon_0$ ۳) $-3\varepsilon_0$ و $7\varepsilon_0$ ۴) $-4\varepsilon_0$ و $8\varepsilon_0$

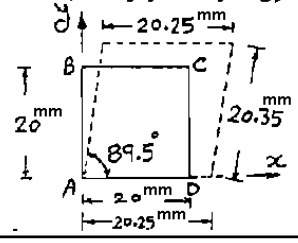
ε_{90}, $\varepsilon_{45} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \Rightarrow 6\varepsilon_0 = \frac{-\varepsilon_0 + 5\varepsilon_0}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \rightarrow \gamma_{xy} = 8\varepsilon_0$, ε_0

$\varepsilon_x = -\varepsilon_0$, $\varepsilon_y = +5\varepsilon_0$, $\gamma_{xy} = 8\varepsilon_0$ $\longrightarrow$ $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -5\varepsilon_0^2 - 16\varepsilon_0^2 = -21\varepsilon_0^2$ $\rightarrow$ $\varepsilon_1 = -3\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 7\varepsilon_0$

سراسری ۸۲

۴۰- صفحه مربع شکل ABCD به صورت خط چین تغییر شکل نموده است. کرنش محوری ایجاد شده در طول قطر AC برابر است با:

۱) ۰,۰۱۶۶
۲) ۰,۰۲۳۱
۳) ۰,۰۳۲۱
۴) ۰,۰۱۹۴



$\varepsilon_x = \frac{0.25}{20} = 0.0125$

$\varepsilon_y = \frac{(0.35)}{20} = 0.0175$

$\gamma_{xy} = \frac{0.5 \times 25}{360} = 0.00827$

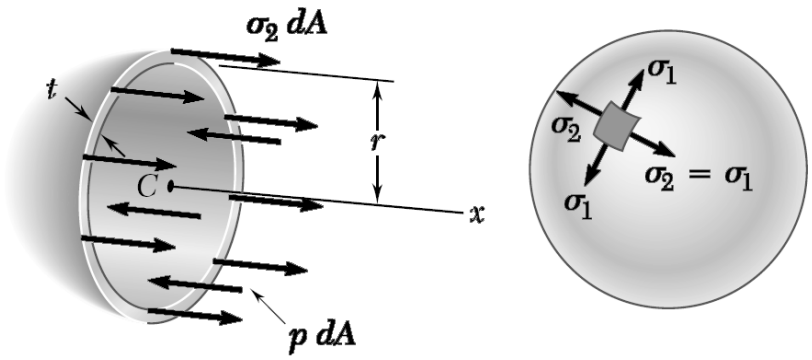
$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy}}{2} = 0.01913$

۱۱-مخازن

مخازن جدار نازک کروی:

جدار مخازن کروی همانند یک بادکند که فوت کرده باشیم، تحت اثر کشش قرار دارد. در شکل سمت راست این کشش ها با $\sigma_1 = \sigma_2$ نشان داده شده است.

برای محاسبه این تنشها مطابق شکل سمت راست چپ سازه را دو نیم می کنیم:



$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{PR}{2t}$$

تنش برشی ماکزیمم در مخزن کروی؟

تغییر ضخامت کره تحت اثر فشار P؟

$$\varepsilon_z = 0 - \frac{2v\sigma}{E} = -\frac{vPR}{tE}$$

$$\Delta t = \varepsilon_z t = -\frac{vPR}{E}$$

تغییر مساحت کره تحت فشار P؟

$$\varepsilon_A = \varepsilon_x + \varepsilon_y = 2\frac{(\sigma - v\sigma)}{E} = 2(1-v)\frac{PR}{2tE}$$

$$\Delta A = \varepsilon_A \times A = (1-v)\frac{PR}{tE}(4\pi R^2) = (1-v)\frac{4\pi PR^3}{tE}$$

کرنش شعاعی و کرنش محیطی چیست؟

تغییر حجم کره تحت فشار P؟

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 2\varepsilon_\theta + \varepsilon_r = 3\varepsilon_\theta = 3\frac{(\sigma - v\sigma)}{E} = 3(1-v)\frac{PR}{2\mathrm{tE}}$$

$$\Delta V = \varepsilon_V \times V = 3(1-v)\frac{PR}{2\mathrm{tE}}\left(\frac{4}{3}\pi \mathrm{R}^3\right)$$

آزاد ۹۲

۴۶- مخزن جدار نازک کروی تحت فشار داخلی $50\frac{kg}{cm^2}$ قرار دارد اگر شعاع متوسط مخزن ۳ متر باشد حداقل ضخامت مخزن کدام است؟ (تنش مجاز کششی مصالح $2500\frac{kg}{cm^2}$ می‌باشد)

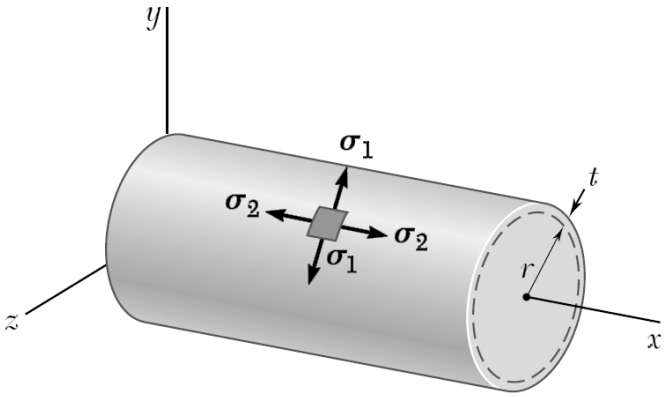
۱) 1 cm **۲) 2 cm**

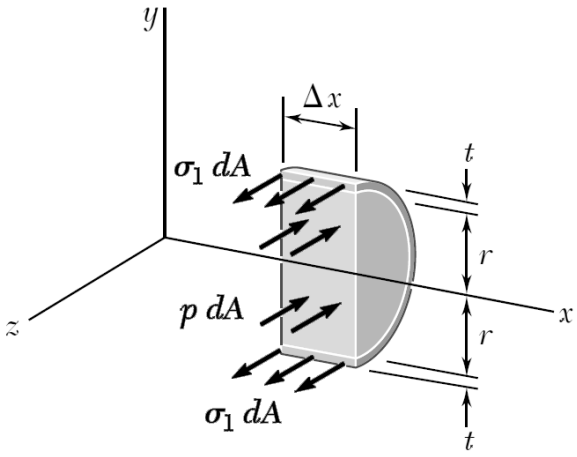
۳) 3 cm **۴) 4 cm**

گزینه ۳

$$\left(\sigma = \frac{PR}{2t} = \frac{50 \times 300}{2t}\right) \leq 2500 \quad \rightarrow \quad t \geq 3\ cm$$

مخزن جدارنازک استوانه ای:





مقدار تنش محیطی (σ_θ)؟

$$\sigma_1 = \sigma_\theta = \frac{PR}{t}$$

مقدار تنش طولی(σ_L)؟

با انتهای بسته: $\sigma_L = \frac{PR}{2t}$

با انتهای باز : $\sigma_L = 0$

در انتها تکیه گاه داشته باشیم(و یا طول بینهایت): $\sigma_L = v\frac{PR}{t}$

تنش برشی ماکزیمم؟

تغییر ضخامت مخزن استوانه ای با انتهای بسته تحت اثر فشار P؟

$$\varepsilon_z = 0 - \frac{v\sigma_\theta}{E} - \frac{v\sigma_L}{E} = -\frac{3vPR}{2tE}$$

$$\Delta t = \varepsilon_z t = -\frac{3vPR}{2E}$$

آزاد ۹۰

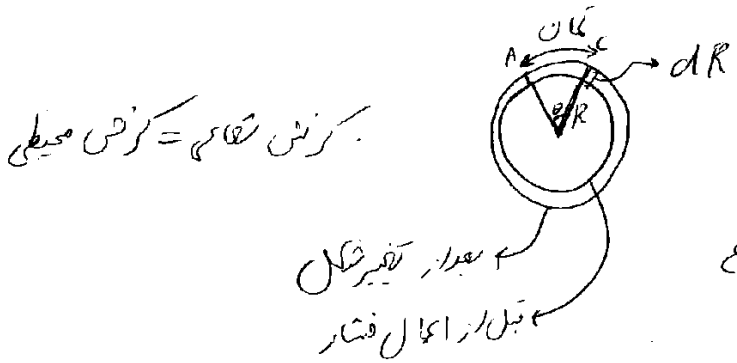
۴۸- یک لوله انتقال گاز طویل جدار نازکی با شعاع متوسط R و ضخامت t در زیر اقیانوس با فشار هیدرواستاتیکی P قرار دارد. اگر فشار داخلی لوله برابر با 3P و کرنش سنج نصب شده در امتداد شعاعی لوله عدد ε_0 را نمایش دهد مقدار P کدام است؟ (E و υ مشخصات مصالح لوله می‌باشند.)

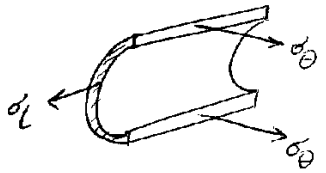
۱) $P = \frac{2E.\varepsilon_0.t}{(1+\upsilon^2).R}$

۲) $P = \frac{E.\varepsilon_0.t}{2.(1-\upsilon^2).R}$

۳) $P = \frac{E.\varepsilon_0.t}{4.(1-\upsilon^2).R}$

۴) $P = \frac{3E.\varepsilon_0.t}{(1+\upsilon^2).R}$





از کرنش در راستای لوله با طول زیاد
تقاریر σ_θ و σ_t بکار برنده‌ها

$\sigma_\theta = \frac{2PR}{t}$

$\varepsilon_t = 0 \rightarrow \sigma_t - \upsilon(\sigma_\theta) = 0 \rightarrow \sigma_t = 2\upsilon\sigma_\theta = \frac{2\upsilon PR}{t}$

بنابراین کرنش طول آن است
و می‌تواند افزایش طول
داشته باشد

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta - \upsilon\sigma_t}{E} = \frac{2PR}{tE} - \upsilon\left(\frac{2\upsilon PR}{tE}\right) = \frac{2PR(1-\upsilon^2)}{tE}$$

$$\rightarrow P = \frac{\varepsilon_0 Et}{2R(1-\upsilon^2)}$$

سراسری ۸۰

استوانه جدار نازک طویلی به قطر $۱۰۰mm$ و ضخامت ۳ میلیمتر، تحت اثر فشار داخلی $۶MPa$ قرارگرفته‌است. تنش طولی ایجاد شده در آن چند MPa است؟ $(\nu = ۰/۳)$

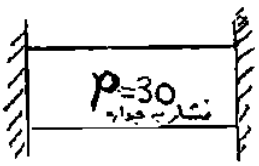
۱) صفر ۲) ۳۰ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰

$$\varepsilon_L = 0 \rightarrow \sigma_L = \upsilon\sigma_\theta = \upsilon\frac{PR}{t} = 0.3\frac{6\times 50}{3} = 30\text{MPa}$$

گزینه ۲

سراسری ۸۱

۳۷- استوانه جدارنازکی ازطرف دو قاعده بین دو تکیه‌گاه صلب مطابق شکل مقابل قرار گرفته است . قطر استوانه ۸۰cm ، ضخامت جداره آن ۲cm، $p = ۳۰ \frac{kg}{cm^۲}$ و $\nu = ۰/۳$ می‌باشد . تنش‌های مماسی و طولی برحسب $\frac{kg}{cm^۲}$ بترتیب کدام است ؟

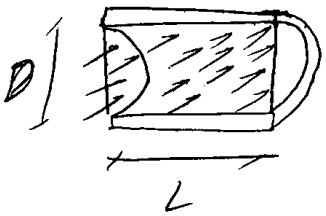


۱) ۶۰۰ و ۱۸۰

۲) ۶۰۰ و صفر

۳) ۶۰۰ و ۳۰۰

۴) ۹۰ و ۳۰۰



$$\sigma_\theta = \frac{F}{2Lt} = \frac{(PL \times 2R)}{2Lt} = \frac{PR}{t} \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{30 \times 40}{2} = 600$$

$$\varepsilon_L = 0 \rightarrow \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_\theta}{E} = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{0.3 \times 600}{E} = 0 \rightarrow \boxed{\sigma_1 = 180}$$

سراسری ۸۳

۴۶- یک لوله طویل و مستقیم انتقال گاز در داخل زمین و زیر اثر فشار داخلی $۱۰ kg/cm^۲$ قرار گرفته است. قطر لوله ۵۰ سانتیمتر و ضخامت جدار آن یک سانتیمتر است. تنش طولی در آن چند کیلوگرم بر سانتیمتر مربع است. $\nu = ۰/۳$ ، $E = ۲ \times ۱۰^۶ kg/cm^۲$

۱)صفر ۱۵۰ (۲ ۲۵۰ (۳ ۵۰۰ (۴

از آنجا که طول لوله بینهایت است و در داخل خاک قرار دارد، تغییرطول آن باید صفر باشد:

$$\varepsilon_L = 0 \rightarrow \sigma_L = \nu\sigma_\theta = \nu\frac{PR}{t} = 0.3\frac{10 \times 25}{1} = 75MPa$$

(در گزینه ها نیست)

سراسری ۷۷

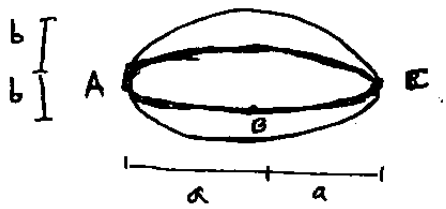
۴- اگر قطر یک مخزن استوانه‌ای جدار نازک با ضخامت ثابت و رفتار خطی که تحت فشار V اتمسفر قرار گرفته‌است دو برابر شود تنش کششی در جدار آن ...

۱) بوجود نمی‌آید ۲) تفاوتی نمی‌کند. ۳) دو برابر می‌شود. ۴) نصف می‌شود.

گزینه ۳

آزاد ۸۵

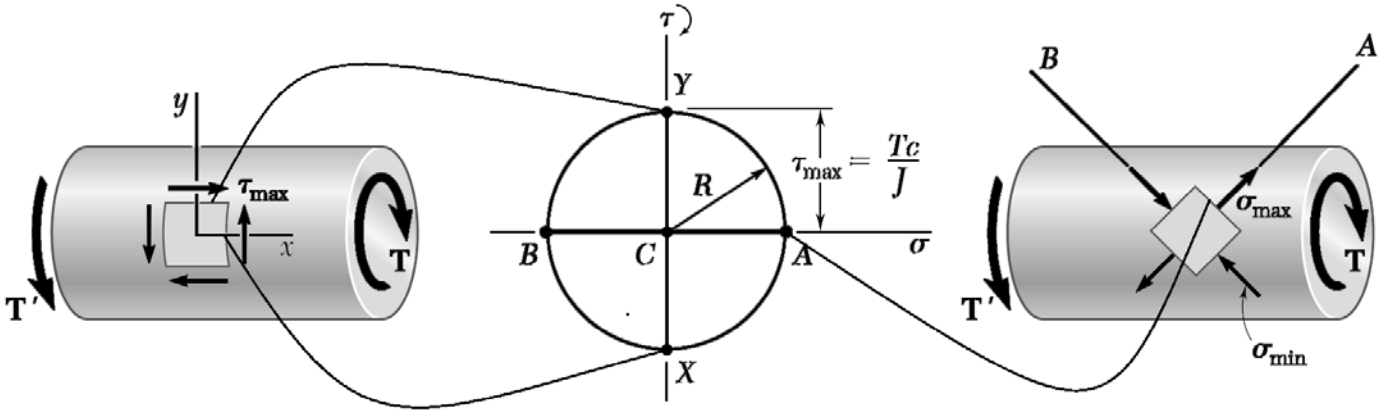
۶۲- در مخزن بیضوی زیر که حاصل دوران بیضی موجود در صفحه حول قطر AC می باشد تحت اثر فشار داخلی P تنش کششی افقی در B چقدر است؟ (ضخامت مخزن ثابت و برابر t می باشد.)



۱) $\frac{Pb}{2t}$ ۲) $\frac{Pa}{2t}$ ۳) $\frac{Pa^2}{2bt}$ ۴) $\frac{Pb^2}{2at}$

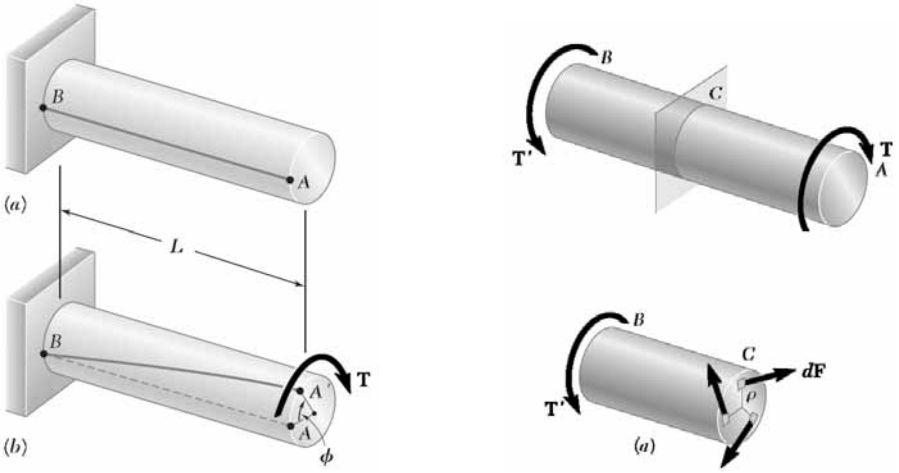
گزینه ۱:

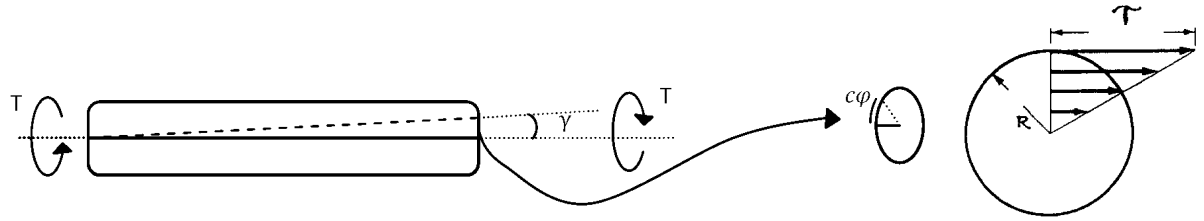
۱۲-پیچش



در مواردی که تنش برشی خالص داریم، تنش محوری کششی حداکثر = تنش محوری فشاری حداکثر = تنش برشی حداکثر

۱۲-۱-مقطع دایروی





ممان اینرسی قطبی دایره: $J = \frac{\pi}{2}R^4$

مدول برشی: $G = \frac{E}{2(1+v)}$

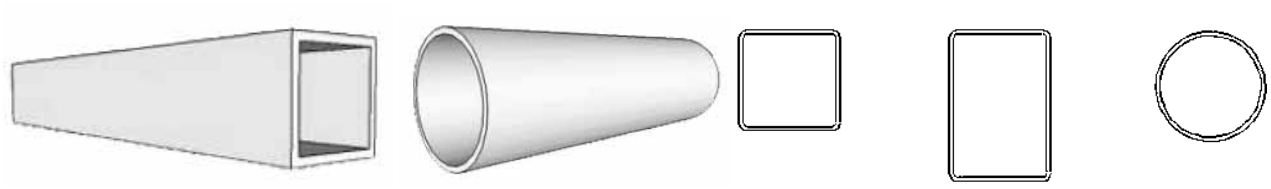
سختی پیچشی: $\frac{GJ}{L}$

رابطه تنش: $\tau = \frac{Tr}{J}$

مقاومت پیچشی: $T = \tau_{مجاز} \times \frac{J}{r}$

زاویه پیچش: $\varphi = \frac{TL}{GJ}$

۱۲-۲-مقاطع جدارنازک بسته



ممان اینرسی قطبی جدارنازک بسته: $J=\frac{4A_m^2}{\int\frac{ds}{t}}=\frac{4A_m^2 t}{P}$

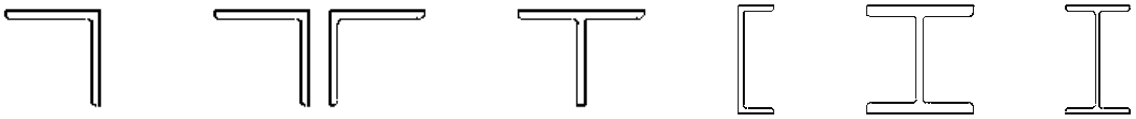
A_m: مساحت محصور در خط مرکزی. برای مثال برای مقطع قوطی به ضلع متوسط a برابر $A=a^2$ می باشد.
P: طول (محیط) مقطع. برای مثال برای مقطع قوطی به ضلع a برابر $P=4a$ می باشد.

رابطه تنش: $\tau=\frac{T}{2A_m t}$

مقاومت پیچشی: $T=\tau_{\text{مجاز}}\times 2A_m t$

زاویه پیچش: $\varphi=\frac{TL}{GJ}$

۱۲-۳-مقاطع جدار نازک باز



ممان اینرسی قطبی جدارنازک باز: $J=\sum\frac{P_i t_i^3}{3}$

رابطه تنش: $\tau=\frac{Tt_i}{J}=\frac{Tt_i}{\frac{\sum P_i t_i^3}{3}}=\frac{3Tt_i}{\sum P_i t_i^3}$

رابطه تنش در صورتی که ضخامت جدار ثابت باشد: $\tau=\frac{3T}{Pt^2}$

مقاومت پیچشی: $T=\tau_{\text{مجاز}}\times\frac{J}{t}$

زاویه پیچش: $\varphi=\frac{TL}{GJ}$

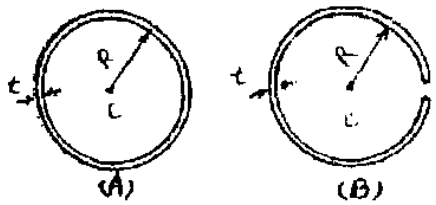
سراسری ۹۲- دکتری

۱- یک مقطع جدار نازک نیم دایره‌ای شکل به ضخامت $t = 1\ cm$ و شعاع متوسط $R = 20\ cm$ تحت لنگر پیچشی $T = 1/2\ kN.m$ قرار دارد. حداکثر تنش برشی ایجاد شده در مقطع بر حسب مگاپاسکال به کدام گزینه نزدیکتر است؟

۱) $\frac{45}{\pi}$ ۲) $\frac{30}{\pi}$ ۳) $\frac{90}{\pi}$ ۴) $\frac{180}{\pi}$

آزاد ۹۰

۵۳- مقاطع لوله‌ای A، B در شکل زیر نشان داده شده‌اند این مقاطع تحت اثر لنگر پیچشی یکنواخت T قرار دارند. نسبت تنش برشی در مقطع B به مقطع A چقدر است؟ (t=0.1 R)

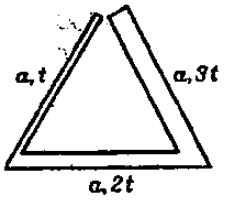


۱) ۱ ۲) ۱۵
۳) ۵ ۴) ۳۰

$$\tau_A = \frac{T}{2\pi r^2 t}$$
$$\tau_B = \frac{T}{\frac{1}{3}(2\pi r t^2)}$$
$$\rightarrow \frac{\tau_B}{\tau_A} = \frac{2\pi r^2 t}{\frac{1}{3}(2\pi r t^2)} = \frac{3r}{t} = 30$$

آزاد ۸۶

۴۶- در مقطع جدار نازک مثلثی زیر تنش برشی ماکزیمم تحت اثر لنگر پیچشی T چقدر است؟



۱) $\frac{T}{3at^2}$ ۲) $\frac{T}{6at^2}$ ۳) $\frac{T}{4at^2}$ ۴) $\frac{T}{12at^2}$

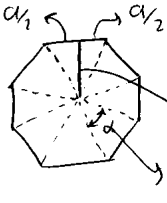
$$\tau_{max} = \frac{T \times (3t)}{\frac{1}{3}(at^3 + a(2t)^3 + a(3t)^3)} = \frac{T}{4at^2}$$

از جدار نازک باز تنش برشی حداکثر در ضخیم‌ترین جدار خواهد بود

سراسری ۸۳

۵- تنش برشی در میله ای تو خالی جدار نازک با ضخامت t و مقطع n ضلعی منتظم تحت اثر پیچش T چقدر است؟ طول هر ضلع n ضلعی برابر a می باشد.

۱) $\frac{2T\tan\frac{\pi}{n}}{na^2t}$ ۲) $\frac{4\pi T}{n^2a^2t}$ ۳) $\frac{2T\sin\frac{\pi}{n}}{na^2t}$ ۴) $\frac{2T\sin\frac{2\pi}{n}}{na^2t}$



$h = \frac{a}{2}\times\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{2}\cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$, $\alpha = \frac{2\pi}{n}$

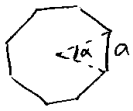
$\longrightarrow A_i = \frac{h\times a}{2} = \frac{a^2}{4}\cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$ (مثلث هر تقعر)

$\Rightarrow$ مساحت کل $= nA_i = \frac{na^2}{4}\cot\left(\frac{\pi}{n}\right) \Rightarrow \tau = \frac{T}{2A_m t} = \frac{T}{2\frac{na^2}{4}\cot\left(\frac{\pi}{n}\right)t} = \frac{2T\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{na^2t}$

آزاد ۸۸

۴۸- یک مقطع n ضلعی منتظم جدار نازک تحت اثر پیچشی قرار دارد. اگر مقطع از حالت بسته به حالت باز تغییر کند تنش برشی ماکزیمم مقطع چند برابر خواهد شد؟ (طول هر ضلع مقطع a و ضخامت مقطع t می باشد.)

۱) $1.5\frac{a}{t}Cotg\frac{\pi}{2n}$ ۲) $1.5\frac{a}{t}Cotg\frac{\pi}{n}$ ۳) $\frac{3a}{t}Cotg\frac{\pi}{n}$ ۴) $\frac{3a}{t}Cotg\frac{\pi}{2n}$



$\alpha = \frac{2\pi}{n}$

$A_m = n\times\left[\frac{\frac{a}{2}\times\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\times a}{2}\right] = \frac{na^2\cot\frac{\alpha}{2}}{4}$

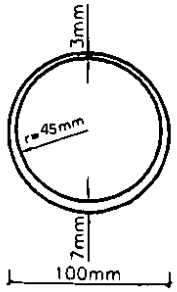
بسته $\tau = \frac{T}{2A_m t} = \frac{T}{2\left(\frac{na^2}{4}\cot\frac{\alpha}{2}\right)t} = \frac{2T}{na^2\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)t}$

باز $\tau = \frac{T}{\frac{1}{3}Pt^2} = \frac{T}{\frac{1}{3}(na)t^2} = \frac{3T}{nat^2}$

$\Rightarrow \frac{\tau_{باز}}{\tau_{بسته}} = \frac{\frac{3}{nat^2}}{\frac{2}{na^2\cot\frac{\alpha}{2}t}} = \frac{3a}{2t}\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3a}{2t}\cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$

سراسری ۸۱

چنانچه لنگر پیچشی برابر با $200N.m$ بر یک لوله جداره نازک با سطح مقطع نشان داده شده با ضخامت متغیر وارد شود حداکثر تنش برشی در مقطع چند مگا پاسگال (MPa) خواهد بود؟



۱) ۴,۷
۲) ۵,۲۴
۳) ۷,۸۳
۴) ۱۰,۹۷

شعاع میانگین $= 4.5 + \frac{\frac{0.3}{2} + \frac{0.7}{2}}{2} = 4.75$ cm

$\tau = \frac{T}{2A_m t} = \frac{20000}{2(4.75^2\times\pi)\times 0.3} = 470\frac{N}{cm^2} = 4.7MPa$

سراسری ۹۱- دکتری

۹- کدام گزینه در مورد مقاطع جدار نازک صحیح است؟

۱) در مقاطع جدار نازک، چه بسته و چه باز، میزان تنش برشی در قسمت نازک جداره کمتر می‌شود.

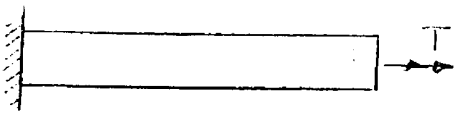
۲) در مقاطع جدار نازک، چه بسته و چه باز، میزان تنش برشی در قسمت نازک جداره بیشتر می‌شود.

۳) در یک مقطع جدار نازک بسته تحت پیچش میزان تنش برشی در قسمت نازک جداره بیشتر می‌شود ولی در مقطع جدار نازک باز تنش برشی در قسمت نازک جداره کمتر می‌شود.

۴) در یک مقطع جدار نازک بسته تحت پیچش میزان تنش برشی در قسمت نازک جداره کمتر می‌شود ولی در مقطع جدار نازک باز تنش برشی در قسمت نازک جداره بیشتر می‌شود.

سراسری ۹۰

۵۰- به میله توپر به قطر d لنگر پیچشی T اعمال می‌شود. بیشترین تنش کششی ایجاد شده در میله چقدر خواهد شد؟



۱) $\sigma_{max} = ۰$

۲) $\sigma_{max} = \frac{۱۶T}{\pi d^۳}$

۳) $\sigma_{max} = \frac{۸\sqrt{۲}T}{\pi d^۳}$

۴) $\sigma_{max} = \frac{۱۶\sqrt{۲}T}{\pi d^۳}$

$$\tau = \frac{Tr}{J} = \frac{T\frac{d}{2}}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^4} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

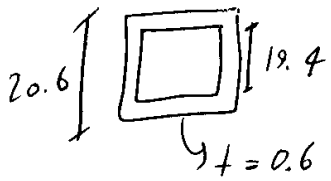
$$\sigma = \tau = \frac{16T}{\pi d^3}$$

سراسری ۸۸

۶۰- میله‌ای با مقطع قوطی زیر اثر پیچش به مقدار ۲ t.m قرار گرفته است.
قوطی دارای ضلع خارجی ۲۰/۶ cm و ضلع داخلی ۱۹/۴ cm است.
تنش عمودی ایجاد شده در آن بر حسب $\frac{kg}{cm^۲}$ چقدر است؟

۱) $\pm ۲۰۸/۳$ ۲) ± ۵۰

۳) صفر ۴) $\pm ۴۱۶/۷$



$$\tau = \frac{T}{2A_m t} = \frac{2\times10^5}{2\times20^2\times0.6} = 416.66\frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma = \tau = 416.66\frac{kg}{cm^2}$$

سراسری ۸۳

۵۸- اگر در داخل تیر طره ای استوانه ای شکل به قطر 20^{cm} که ممان پیچشی $\pi(t-m)$ در انتهای آن اثر می کند، سوراخی هم مرکز در طول تیر ایجاد نماییم بطوریکه زاویه پیچشی آن ۵٪ افزایش یابد، حداکثر تنش برشی ایجاد شده در تیر چه مقدار می گردد؟

۱) $100\ \frac{kg}{cm^2}$ ۲) $190\ \frac{kg}{cm^2}$ ۳) $200\ \frac{kg}{cm^2}$ ۴) $210\ \frac{kg}{cm^2}$

زاویه پیچش برابر است با $\varphi=\frac{TL}{GJ}$ که ۵٪ افزایش یافته است بنابراین $\frac{J_1}{J_2}=1.05$

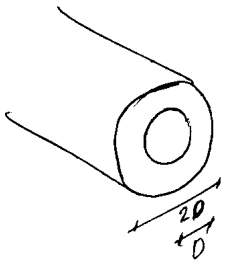
بنابراین مقدار تنش حداکثر نیز ۵٪ افزایش می یابد $\tau=\frac{TR}{J}$

$$\tau=1.05\times\frac{\pi\times10^5\times10}{\frac{\pi}{2}\times10^4}=210$$

آزاد ۸۳

۲۳- محور فولادی توپری به قطر D را داخل محور فولادی دیگری به قطر داخلی D و قطر خارجی 2D قرار می دهیم و دو محور را به صفحه صلبی جوش می دهیم به صورتیکه در پیچش، پیچش هردو محور مقدار یکسانی است. تحت اثر کوپل پیچشی T نسبت تنش برشی ماکزیمم محور توخالی به محور توپر چقدر است.

۱) 1.5 ۲) 2 ۳) 3.5 ۴) 7.5

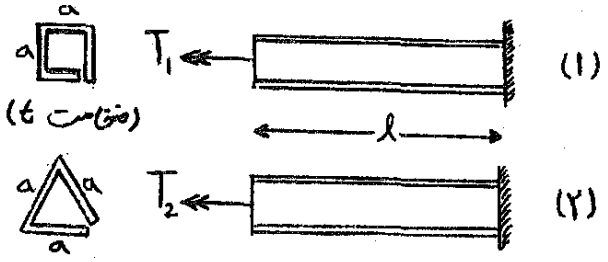


$$\tau_1=\frac{TR}{J}$$
$$\tau_2=\frac{T(2R)}{J}$$
} → ۲ برابر

آزاد ۹۲

۵۱- اگر تحت لنگرهای پیچشی اعمال شده زاویه پیچش انتهای هر دو میله یکسان باشد، نسبت حداکثر تنش برشی در میله (۱) به (۲) کدام است؟ (ضخامت و جنس میله‌ها یکسان است)

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴



گزینه ۱:

ابتدا زاویه پیچش را در هر دو محاسبه و برابر هم قرار می دهیم:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=\frac{T_1 l}{G\left(\frac{1}{3}4at^3\right)}\\ \varphi_2&=\frac{T_2 l}{G\left(\frac{1}{3}3at^3\right)}\end{aligned}\right\}\rightarrow \varphi_1=\varphi_2 \quad\rightarrow\quad \frac{T_1}{T_2}=\frac{4}{3}$$

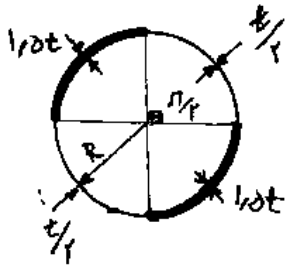
تنش برشی تحت اثر پیچش در مقاطع جدارنازک باز (با ضخامت جدار ثابت) از رابطه $\tau=\frac{3T}{Pt^2}$ بدست می آید که p طول مقطع می باشد:

$$\left.\begin{aligned}\tau_1&=\frac{3T_1}{4at^2}\\ \tau_2&=\frac{3T_2}{3at^2}\end{aligned}\right\}\rightarrow\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{3T_1}{4T_2}=1$$

سراسری ۹۴

۴۸- میله‌ای استوانه‌ای با شعاع متوسط R، دارای جداره‌ای با ضخامت متغیر مطابق شکل است، با فرض خیلی کوچک بودن نسبت $\frac{t}{R}$، نسبت سختی پیچشی این میله نسبت به میله‌ای با همان طول و شعاع متوسط ولی ضخامت یکنواخت t چقدر می‌باشد؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) ۱
۴) $\frac{۳}{۲}$



$$j_1 = 2\pi R^3$$
$$j_2 = \frac{4A_m^2}{\sum \frac{p_i}{t_i}} = \frac{4(\pi R^2)^2}{\frac{\pi R}{\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{\pi R}{(1.5t)}} = \frac{3}{2}\pi R^3 \Bigg\} \frac{j_2}{j_1} = \frac{3}{4}$$

تمرین: سراسری۸۵

۵۷- دو میله A و B به مقطع دایره موجود است. طول و قطر میله A دو برابر طول و قطر میله B می‌باشد. لنگر پیچشی ۲T به میله A و لنگر پیچشی T به میله B وارد می‌شود. نسبت تنش‌های برشی ماکزیمم میله‌ها چقدر است $\left(\frac{\tau_{max\,A}}{\tau_{max\,B}}\right)$؟

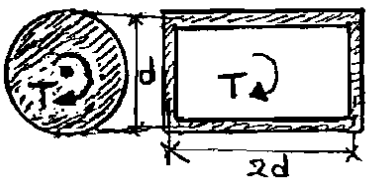
۱) ۱۰
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۸}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

$$\frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{\frac{(2T)(2R)}{\left(\frac{\pi}{2} \times (2R)^4\right)}}{\frac{TR}{\left(\frac{\pi}{2} \times R^4\right)}} = \frac{1}{4}$$

تمرین: سراسری۸۵

۵۸- در صورتی‌که تنش برشی در هر دو مقطع نشان داده شده یکسان باشند حداقل ضخامت (t_{min}) مقطع مستطیلی چقدر است؟

۱) $\frac{\pi d}{۱۲۸}$
۲) $\frac{\pi d}{۶۴}$
۳) $\frac{\pi d}{۳۲}$
۴) $\frac{\pi d}{۱۶}$



$$\left.\begin{aligned} \tau_{\text{دایره}} &= \frac{Tr}{J} = \frac{T\frac{d}{2}}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^4} = \frac{16T}{\pi d^3} \\ \tau_{\text{مستطیل}} &= \frac{T}{2A_m t} = \frac{T}{2(d \times 2d)t} = \frac{T}{4td^2} \end{aligned}\right\} \tau_{\text{دایره}} = \tau_{\text{مستطیل}} \rightarrow \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{T}{4td^2} \rightarrow t = \frac{\pi d}{64}$$

تمرین: آزاد۸۹

۴۸- در استوانه جدار نازک به شعاع متوسط R و ضخامت t تنش کششی و فشاری ماکزیمم تحت اثر لنگر پیچشی T چقدر است؟

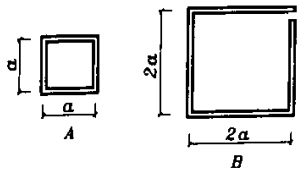
۱) 0 و 0
۲) $\frac{T}{2\pi R^2 t}$ و $\frac{T}{2\pi R^2 t}$
۳) $\frac{T}{4\pi R^2 t}$ و $\frac{T}{2\pi R^2 t}$
۴) $\frac{T}{4\pi R^2 t}$ و $\frac{T}{4\pi R^2 t}$

گزینه ۲

تمرین سراسری ۸۰

مقطع A جدار نازک بسته با ضخامت یکسان t و مقطع B جدار نازک باز با ضخامت یکسان t می‌باشد. اگر $t = \frac{a}{۲۰}$ باشد، در مقابل یک لنگر پیچشی یکنواخت، تنش برشی در B، ..... برابر تنش برشی در A است.

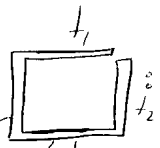
۱) ۱ ۲) ۲۰ ۳) ۴ ۴) ۱۵



$\tau_B = \frac{T}{\frac{1}{3}(8a \times (\frac{a}{20})^2)} = \frac{150T}{a^3}$ $\tau_A = \frac{T}{2a^2(\frac{a}{20})} = \frac{10T}{a^3} \Rightarrow \frac{\tau_B}{\tau_A} = 15$

حداز نازک باز با ضخامت‌های مختلف:

$t_2 > t_1$



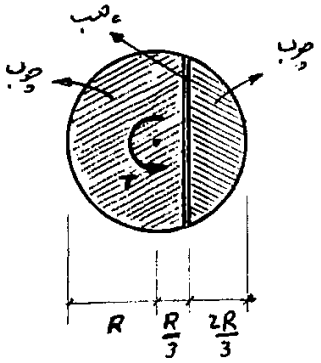
$\tau = \frac{T t_2}{\frac{1}{3} P_2 t_2^3}$ $\tau = \frac{T t_1}{\frac{1}{3} P_2 t_1^3}$

برعکس حداز نازک بسته که تنش ماکزیمم در نازک‌ترین جدار اتفاق می‌افتد در حداز نازک باز تنش ماکزیمم در ضخیم‌ترین جدار اتفاق می‌افتد

سراسری ۹۲

۵۱- عضوی به طول L با مقطع دایره‌ای مطابق شکل زیر تحت کوپل پیچشی T قرارگرفته است. در صورتی‌که مقطع از دو قسمت چوبی که توسط چسب به یکدیگر متصل شده تشکیل شده باشد، حداکثر کوپل پیچشی قابل تحمل توسط مقطع، کدام است؟

τ = تنش برشی مجاز چسب، ۲/۵τ = تنش برشی مجاز چوب



۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲\pi} R^۳$

۲) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳\pi} R^۳$

۳) $\frac{۲\pi}{۳\sqrt{۲}} R^۳$

۴) $\frac{۳\pi}{۴\sqrt{۲}} R^۳$

گزینه ۴ صحیح است.

کنترل تنش حداکثر در چوب:

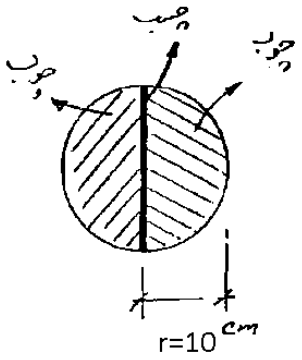
$$\frac{TR}{J} = \frac{TR}{\frac{\pi R^4}{2}} = \frac{2T}{\pi R^3} < 2.5\tau \rightarrow T < 1.25\pi R^3 \tau$$

کنترل تنش حداکثر در چسب (در مواردی که چسب داریم باید مولفه عمود بر راستای چسب را کنترل کنیم):

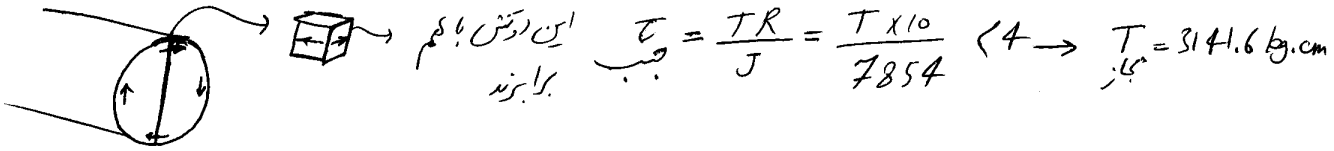
$$\frac{TR}{J} \times \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{TR}{\frac{\pi R^4}{2}} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}T}{3\pi R^3} < \tau \rightarrow T < \frac{3\pi R^3}{4\sqrt{2}} \tau$$

تمرین: سراسری ۸۳

۵۴- عضوی با مقطع دایره ای مطابق شکل تحت کوپل پیچشی T قرار گرفته است. مقطع عضو از دو نیم دایره با جنس چوب که توسط چسب به یکدیگر متصل شده تشکیل شده است در صورتی که تنش مجاز چوب $۱۰kg/cm^۲$ و تنش مجاز چسب $۴kg/cm^۲$ باشد، مطلوب است حداکثر کوپل پیچشی مجاز مقطع $J = ۷۸۵۴\ cm^۴$



۱) ۱۲۵۷ kg.cm
۲) ۳۱۴۲ kg.cm
۳) ۷۸۵۴ kg.cm
۴) ۱۹۶۳۵ kg.cm

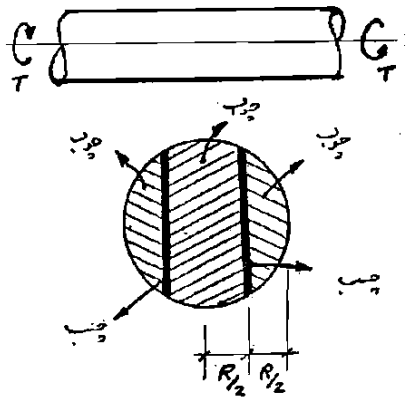


تمرین: سراسری۸۵

۶- عضوی مطابق شکل تحت کوپل پیچشی T قراردارد. مقطع از سه قسمت چوبی که توسط چسب به یکدیگر متصل شده‌اند، تشکیل یافته است. مطلوبست حداکثر کوپل پیچشی قابل تحمل توسط آن:

تنش مجاز برشی چسب = $۲\ \frac{kg}{cm^۲}$

تنش مجاز برشی چوب= $۵۲\ \frac{kg}{cm^۲}$



۱) $۲\frac{J}{R}.\tau$

۲) $\frac{۲}{۳}.\frac{J}{R}.\tau$

۳) $\frac{۵}{\sqrt{۳}}.\frac{J}{R}.\tau$

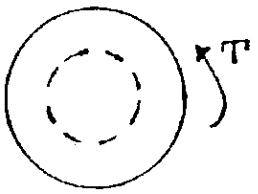
۴) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}.\frac{J}{R}.\tau$

گزینه ۴

۱۲-۴- سهم مقطع از پیچش

سراسری ۸۳

۵۵- چه سهمی از کویل پیچشی T توسط بخش مرکزی مقطع که دارای نصف مساحت دایره است تحمل می کرددا

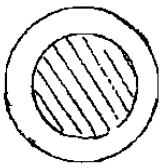


۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۱۶}$

$A_1 = A/2 \rightarrow \pi r^2 = \frac{\pi R^2}{2} \Rightarrow r = R/\sqrt{2} \Rightarrow \frac{\text{گ}\,J}{\text{کل}\,J} = \frac{\frac{\pi}{2} \times r^4}{\frac{\pi}{2} \times R^4} = \frac{1}{4}$

سراسری ۸۴

۵۹- میله‌ای توپر به مقطع دایره به شعاع R زیر اثر لنگر پیچشی T است. مساحت هاشور خورده داخلی به شعاع چقدر باشد تا لنگر پیچشی $\frac{T}{۲}$ در آن قرار گیرد؟



۱) $\frac{R}{۲}$
۲) $\frac{R}{\sqrt[۴]{۲}} = ۰/۷۹۴\,R$
۳) $\frac{R}{\sqrt[۴]{۲}} = ۰/۸۴۱\,R$
۴) $\frac{R}{\sqrt{۲}} = ۰/۷۰۷\,R$

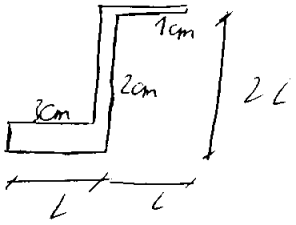
$\frac{J\ \text{هاشور}}{J\ \text{کل}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\frac{\pi}{2} r^4}{\frac{\pi}{2} R^4} = \frac{1}{2} \rightarrow r = \frac{R}{\sqrt[4]{2}}$

آزاد ۸۹

۵۱- یک میله فولادی به قطر d_1 درون یک لوله توخالی برنجی به قطر داخلی d_1 و قطر خارجی d_2 قرار داده شده است و میله یکپارچه‌ای بدست آمده است. برای اینکه تحت اثر یک لنگر پیچشی، میله و لوله لنگرهای پیچشی یکسانی را تحمل کنند، نسبت $\frac{d_2}{d_1}$ چقدر باید باشد؟ $(G_{St}=2G_{Br})$

۱) $\sqrt[4]{3}$
۲) $\sqrt[4]{2}$
۳) $\sqrt[4]{6}$
۴) $\sqrt{2}$

مثال: سهم قسمت ۳ سانتی از تحمل پیچش چقدر است؟

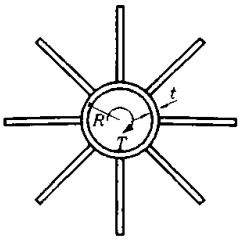


$$\frac{T_3}{T} = \frac{\frac{1}{3}(3^3 \times L)}{\frac{1}{3}(3^3 \times L + 2^3 \times (2L) + 1^3 \times L)} = \frac{27}{44}$$

سراسری ۷۷

۵- میله‌ای با سطح مقطع نشان داده شده در شکل تحت‌تأثیر لنگر پیچشی T قرار دارد. شعاع متوسط دایره R و ضخامت آن t می‌باشد. ضخامت هر یک از ورقهای اتصالی به دایره جدار نازک t و طول آن $2\pi R$ می‌باشد. چنانچه نسبت $\frac{R}{t} = 10$ باشد، چند درصد لنگر پیچشی T توسط جدارهٔ نازک دایره‌ای شکل تحمل خواهد شد؟

۱) ٪۹۱,۲
۲) ٪۹۵,۳
۳) ٪۹۷,۴
۴) ٪۹۹,۲



لنگر پیچشی به نسبت J بین اعضا تقسیم می‌شود

$$J_{\text{دایره}} = \left(\frac{\pi}{2}R^4\right)' = 4\left(\frac{\pi}{2}R^3\right)dR = 2\pi R^3 t$$

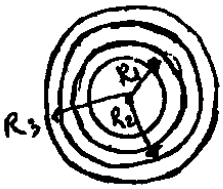
$$J_{\text{جدار نازک}} = 8\left[\frac{1}{3}Lt^3\right] = \frac{8}{3} \times (2\pi R)(t)^3 = \frac{16\pi R t^3}{3}$$

$$\text{سهم دایره} = \frac{J_{\text{دایره}}}{J_{\text{دایره}} + J_{\text{جدار نازک}}} = \frac{2\pi R^3 t}{2\pi R^3 t + \frac{16}{3}\pi R t^3}$$

$$\frac{R}{t} = 10 \longrightarrow \text{سهم دایره} = 0.974$$

آزاد ۸۵

۶۵- در مقطع لوله ای یکپارچه زیر که از سه نوع فلز با ضخامت های یکسان t تشکیل شده است تحت اثر یک لنگر پیچشی، لنگر پیچشی تحمل شده توسط قسمتهای مختلف مقطع یکسان است. کدام رابطه زیر صحیح می باشد؟
(R_i شعاع متوسط قسمت i ام است و $t \ll R_i$)



۱) $G_1R_1 = G_2R_2 = G_3R_3$
۲) $G_1R_1^3 = G_2R_2^3 = G_3R_3^3$
۳) $\frac{G_1}{R_1} = \frac{G_2}{R_2} = \frac{G_3}{R_3}$
۴) $\frac{G_1}{R_1^3} = \frac{G_2}{R_2^3} = \frac{G_3}{R_3^3}$

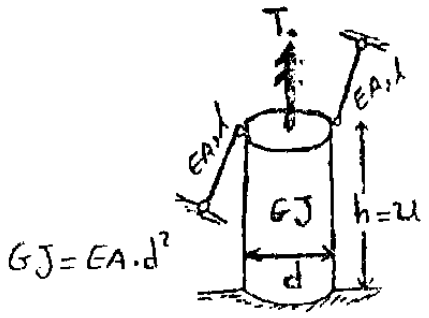
$$\left(\frac{GJ}{L}\right)_1 = \left(\frac{GJ}{L}\right)_2 \longrightarrow \frac{G_1(2\pi R_1^3 t)}{L} = \frac{G_2(2\pi R_2^3 t)}{L} = \frac{G_3(2\pi R_3^3 t)}{L}$$

$$G_1R_1^3 = G_2R_2^3 = G_3R_3^3$$

سختی پیچشی دو مقطع برابر است ← لوله $J = \left(\frac{\pi}{2}R^4\right)' = 2\pi R^3 t$

آزاد ۹۰

۵۲- به استوانه‌ای به ارتفاع h و صلبیت پیچشی GJ که توسط دو میله با صلبیت محوری EA و طول ℓ در جهت عمود بر خود نگه داشته شده است، لنگر پیچشی T_0 اعمال گردیده است. نیروی محوری ایجاد شده در میله‌ها کدام است؟



۱) $\frac{T_0}{d}$

۲) $\frac{T_0}{2d}$

۳) $\frac{2T_0}{d}$

۴) $\frac{T_0}{4d}$

$K_{\text{استوانه}} = \frac{GJ}{h} = \frac{EAd^2}{2L}$ ← سختی پیچشی استوانه

سختی پیچشی میله‌ی نگهدارنده

اگر T_0 را میله‌ی تحمل کند نیروی توسط میله برابر $F = \frac{T_0}{d}$ خواهد بود

تغییر طول در میله برابر $\Delta = \frac{FL}{EA}$ خواهد بود در نتیجه دوران حل اثر T_0

برابر $\theta = \frac{\Delta}{(\frac{d}{2})} = \frac{2T_0L}{EAd^2}$ خواهد بود پس

$K_{\text{میله}} = \frac{T_0}{\theta} = \frac{EAd^2}{2L}$

T_0 به نسبت سختی بین استوانه و میله‌ی تقسیم می‌شود

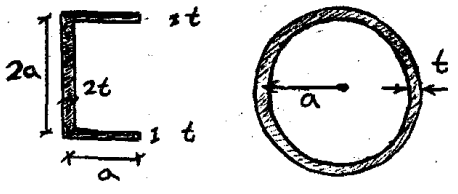
سختی میله‌ی برابر سختی استوانه است پس

$T_{\text{سهم میله‌ی}} = \frac{T_0}{2} \Rightarrow T_{\text{نیروی میله}} = \frac{T_0}{2d}$

آزاد ۹۲

۴۹- نسبت صلبیت پیچشی مقطع (۲) به (۱) کدام است؟

(جنس مصالح هر دو مقطع یکسان می‌باشد و $\frac{a}{t} = 30$)



(۱) (۲)

۱) 100π

۲) 200π

۳) 300π

۴) 400π

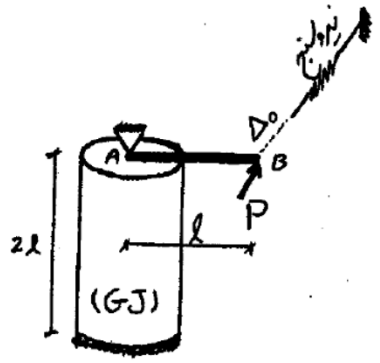
گزینه ۳

صلبیت پیچشی از رابطه GJ محاسبه می شود. با توجه به اینکه جنس یکسان است، داریم:

$$\frac{GJ_2}{GJ_1} = \frac{\left(\frac{\pi a^4}{2}\right)'}{\frac{1}{3}(ta^3 + ta^3 + (2t)(2a)^3)} = \frac{2\pi a^3 t}{6at^3} = 300\pi$$

آزاد ۹۱

۴۹- انتهای میله صلب AB قبل از بارگذاری از انتهای نیروسنج به اندازه Δ_0 فاصله دارد، حداکثر مقدار P قابل اعمال چقدر باشد تا نیروسنج عددی را نشان ندهد؟ (تکیه‌گاه A مفصلی و صلبیت پیچشی استوانه برابر با GJ می‌باشد)



۱) $\frac{1}{2}\frac{GJ}{\ell^3}\times\Delta_0$

۲) $\frac{GJ}{\ell^3}\times\Delta_0$

۳) $2\frac{GJ}{\ell^3}\times\Delta_0$

۴) $\frac{1}{4}\frac{GJ}{\ell^3}\times\Delta_0$

گزینه ۱

مقدار $\Delta 0$ را بر حسب P بدست می آوریم:

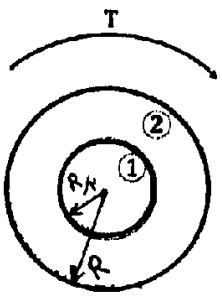
$$T = P \times l \qquad \rightarrow \varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{Pl \times 2l}{GJ} \qquad \rightarrow \Delta_0 = \varphi \times l = \frac{2Pl^3}{GJ}$$

بنابراین P باید کمتر از مقدار زیر باشد:

$$P = \frac{\Delta_0 GJ}{2l^3}$$

سراسری ۹۳

۴۸- در مقطع ناهمگن زیر چنانچه بخواهیم مقطع بهینه باشد، باید چه نسبتی بین مدول برشی برقرار باشد؟ (مقطع بهینه مقطعی است که مصالح (۱) و (۲) به صورت همزمان به حد جاری شدن می‌رسند)



۱) $G_1 = 2G_2$

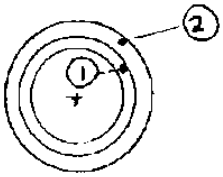
۲) $G_1 = \frac{1}{2}G_2$

۳) $G_1 = \frac{5}{32}G_2$

۴) $G_1 = \frac{32}{5}G_2$

سراسری ۸۳

۴۵- میله ای از دو جنس مطابق شکل تشکیل یافته است بطوری که $G_2 = 2G_1$. شعاع دایره ها بترتیب ۲۰،۲۵ و ۱۸ میلیمتر می باشد. زیر اثر پیچش نسبت تنش جنس ۲ به تنش جنس ۱ چقدر است؟



۱) ۱/۲۵

۲) ۲

۳) ۲/۵

۴) $\frac{25}{9}$

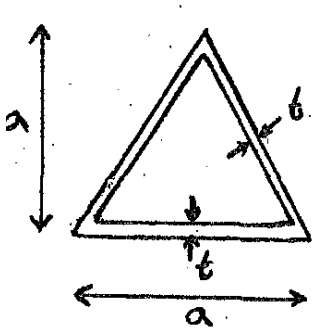
۱۲-۵-مقاومت پیچشی

مقاومت پیچشی دایره توپر: $T = \tau_{\text{مجاز}} \times \frac{J}{R} = \tau_{\text{مجاز}} \times \frac{\frac{\pi}{2}R^4}{R}$

مقاومت پیچشی جدارنازک بسته: $T = \tau_{\text{مجاز}} \times 2A_m t$

مقاومت پیچشی جدارنازک باز: $T = \tau_{\text{مجاز}} \times \frac{J}{t_{max}} = \tau_{\text{مجاز}} \times \frac{\frac{\sum P_i t_i^3}{3}}{t_{max}}$

آزاد ۹۲



۵۲- اگر در مقطع جدار نازک نشان داده شده ابعاد و ضخامت مقطع ۲ برابر شود، ظرفیت پیچشی مقطع چند برابر می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۸ ۴) ۱۶

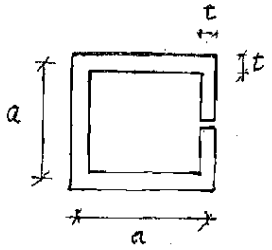
گزینه ۳

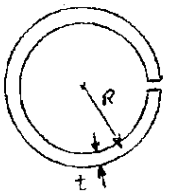
ظرفیت پیچشی مقطع برابر است با: $T = (2A_m t)\tau_{\text{مجاز}}$

بنابراین اگر ابعاد دو برابر شود، مقدار A_m چهار برابر شده و مقدار t نیز دو برابر می شوند و ظرفیت پیچشی ۸ برابر می شود.

سراسری۸۶

۵۳- مطلوبست تعیین نسبت $\frac{a}{R}$ برای آنکه ظرفیت پیچشی دو مقطع مقابل یکسان باشد:



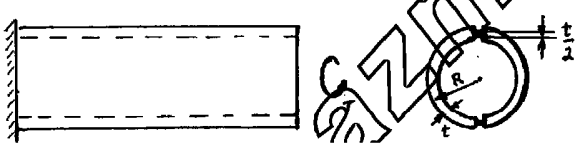


۱) $\frac{a}{R} = \pi$
۲) $\frac{a}{R} = \frac{\pi}{۲}$
۳) $\frac{a}{R} = ۲\pi$
۴) $\frac{a}{R} = \frac{۳\pi}{۲}$

$\frac{1}{3}(4a)t^2 = \frac{1}{3}(2\pi R)t^2 \rightarrow \frac{a}{R} = \frac{\pi}{2}$

سراسری ۹۱

۵۴- **عضوی به طول یک متر مطابق شکل تحت کوپل پیچشی T قرار گرفته است. عضو از دو نیم استوانه با شعاع متوسط R و ضخامت t تشکیل شده است. دو نیم استوانه در طول عضو توسط جوش با تنش مجاز τ و ضخامت $\frac{t}{۲}$ متصل گردیده است. حداکثر کوپل پیچشی قابل تحمل توسط عضو کدام رابطه زیر است؟**



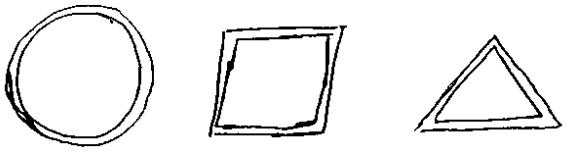
۱) $۲\pi R^۲.t.\tau$
۲) $\frac{۱}{۲}\pi R^۲.t.\tau$
۳) $\pi R^۲.t.\tau$
۴) $\frac{۱}{۴}\pi R^۲.t.\tau$

$\tau_{\text{جوش}} = \frac{T}{2A_m t} = \frac{T}{2(\pi R^2)(t/2)} \rightarrow T = \pi R^2 t \tau$

مساحت محصور — ضخامت جوش

در جدارنازک بسته هرچه شکل مقطع به دایره نزدیکتر باشد مقدار تنش پیچشی کاهش و مقاومت پیچشی افزایش می یابد :

مثال: طول محیط هر سه مقطع یکسان است. مقاومت پیچشی کدام مقطع بیشتر است؟



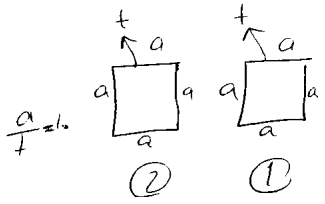
پاسخ:

دایره > مربع > مثلث

در جدارنازک باز مقدار تنش پیچشی و مقاومت پیچشی ربطی به شکل مقطع ندارد (تنها طول مقطع، P، و ضخامت مقطع، t، مهم است).

سوال: مقاومت پیچشی کدام مقطع بیشتر است (ضخامت جدار در هر سه یکسان است)؟

پاسخ: مقاومت هر سه یکسان است.



سوال: مقاومت پیچشی کدام مقطع بیشتر است؟

پاسخ:

$$T_1 = \frac{\tau(Pt^2)}{3} = \frac{\tau(4at^2)}{3} = \tau\left(\frac{40}{3}t^3\right) = 13.33\,t^3$$

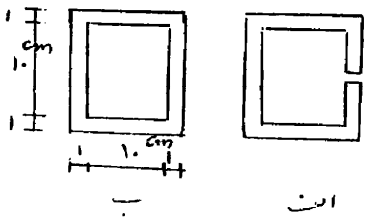
$$T_2 = \tau(2A_m t) = \tau(2a^2 t) = \tau(200t^3) = 200\,t^3 \quad \checkmark$$

نتیجه: مقاطع بسته مقاومت بالاتری دارند.

سراسری ۹۰

۵۱- دو میله با مقطع جدار نازک کاملاً مشابه با تفاوت اینکه در گزینه الف شیار کوچکی وجود دارد، تحت گشتاور پیچشی قرار دارند. مقاومت پیچشی میله الف چند برابر میله ب است؟

۱) ۰/۵۶
۲) ۵/۵
۳) ۰/۱۸
۴) ۱۶/۶



تنش برشی در جدار نازک باز $\Rightarrow \tau = \frac{3T}{Pt^2} \Rightarrow$ مقاومت پیچشی $= T = \frac{\tau P t^2}{3}$

تنش برشی در جدار نازک بسته $\rightarrow \tau = \frac{T}{2A_m t} \Rightarrow$ مقاومت پیچشی $= T = 2\tau A_m t$

$$\Rightarrow \frac{T_{\text{باز}}}{T_{\text{بسته}}} = \frac{\frac{44 \times 1^2}{3}}{2 \times 11 \times 11 \times \frac{1}{t}} = 0.0606$$

سراسری ۹۲- دکتری

۴- میله‌ای با مقطع دایره‌ای، به طول $2\ m$ و شعاع مقطع $5\ cm$ مفروض است. حداکثر چند رادیان می‌توان میله را پیچاند، تا به نقطهٔ تسلیم نرسد؟ تنش مجاز برشی $\tau_a = 1000 \frac{kg}{cm^2}$ ، مدول ارتجاعی $E = 2\times10^6 \frac{kg}{cm^2}$ و ضریب پواسون $\nu = 0/25$ است.

۱) ۰/۰۲ ۲) ۰/۰۴

۳) ۰/۰۲۵ ۴) ۰/۰۵

سراسری ۹۴

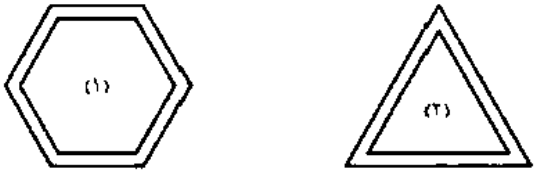
۵۰- اگر دو مقطع هم جنس و هم طول مطابق شکل، سختی پیچشی یکسانی داشته باشند، نسبت مقاومت پیچشی مقطع (۱) به مقطع (۲) کدام است (جنس مصالح یکسان است)؟

۱) $\frac{2}{3}$

۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{4}{3}$

۴) $\frac{3}{2}$



$a.t_1$ $2a.t_2$

نسبت مقاومت های پیچشی برابر است با:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\tau_0 \times 2A_{m1}t_1}{\tau_0 \times 2A_{m2}t_2} = \frac{A_{m1}t_1}{A_{m2}t_2}$$

مساحت A_{m1} شامل شش مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a می باشد و بنابراین داریم:

$$\frac{A_{m1}}{A_{m2}} = \frac{6}{2^2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{A_{m1}t_1}{A_{m2}t_2} = \frac{3}{2}\frac{t_1}{t_2}$$

نسبت t ها را با مساوی قرار دادن سختی مقاطع بدست می اید. با توجه به اینکه سختی پیچشی یکسان است، مقادیر J نیز باید یکسان باشد ($K = \frac{GJ}{L}$):

$$J_1 = J_2 \rightarrow \left(\frac{4A_m^2}{\frac{p}{t}}\right)_1 = \left(\frac{4A_m^2}{\frac{p}{t}}\right)_2$$

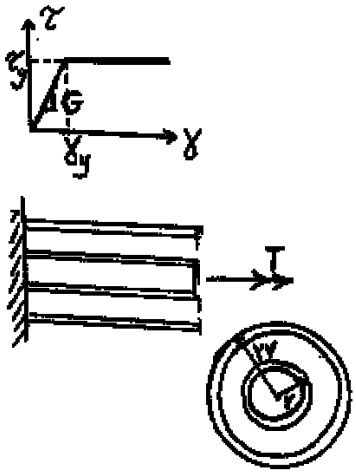
در رابطه فوق محیط هر دو مقطع یکسان است و بنابراین:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{A_{m2}^2}{A_{m1}^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{2}\frac{t_1}{t_2} = \frac{2}{3}$$

سراسری ۹۳- دکتری

۳- مجموعه نشان داده شده از دو لوله جدار نازک هم مرکز تشکیل شده که در یک انتها توسط دیسک صلب به یکدیگر متصل شده‌اند به طوری که میزان زاویه پیچش در هر دو یکسان است و از طرف دیگر تحت کوپل پیچشی T قرار می‌گیرند. هرگاه ضخامت لوله‌ها ثابت t و طول مجموعه L فرض شود و مصالح در هر دو لولـه الاستوپلاستیک در نظر گرفته شود و G مدول برشی و τ_y تنش برشی تسلیم باشند. T_y و ϕ_y در مجموعه که متناظر با رخداد اولین تسلیم باشد، کدام می‌باشند؟



۱) $T_y = 9\pi tr^2\tau_y$ و $\phi_y = \frac{L}{r}\frac{\tau_y}{G}$

۲) $T_y = 12\pi tr^2\tau_y$ و $\phi_y = \frac{L}{2r}\frac{\tau_y}{G}$

۳) $T_y = 9\pi tr^2\tau_y$ و $\phi_y = \frac{L}{2r}\frac{\tau_y}{G}$

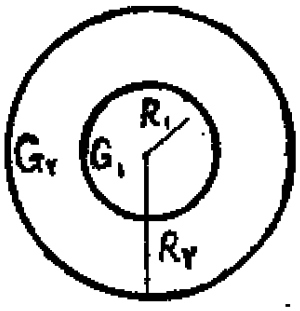
۴) $T_y = 12\pi tr^2\tau_y$ و $\phi_y = \frac{L}{r}\frac{\tau_y}{G}$

سراسری ۹۳- دکتری

۶- مقطع میله مدور نشان داده در شکل از دو جنس مختلف تشکیل شده اسـت بـه طوری که $G_1 = 2G_2$ می‌باشد. نسبت $\frac{R_1}{R_2}$ چقدر باشد تا مقطـع مـورد نظـر تحت اثر پیچش به طور بهینه طراحی شده باشد. (τ_w تنش برشی مجاز مصالح)

جنس (1) $\tau_w = 3\tau_o$

جنس (2) $\tau_w = \tau_o$



۱) ۱/۷۵

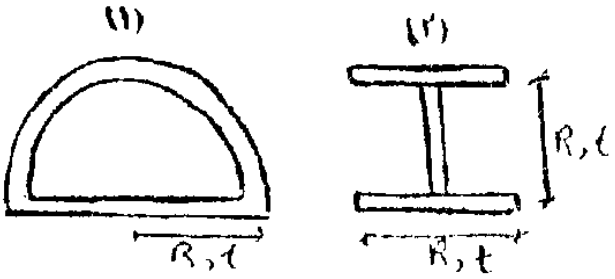
۲) ۱/۵

۳) ۱/۲۵

۴) ۲

آزاد ۹۰

۵۱- نسبت مقاومت پیچشی مقطع (۱) به مقاومت پیچشی مقطع (۲) کدام است؟ (جنس مصالح هر دو مقطع یکسان و ضخامت تمام قسمت‌ها برابر t می‌باشد.) $\left(\frac{R}{t}=10\right)$



۱) 5π
۲) 10π
۳) 2π
۴) 15π

مقاومت پیچشی مقطع ①

$$\tau=\frac{T}{2A_m t} \rightarrow T_1=\tau\left(2\,\frac{\pi R^2}{2}\times t\right)=\tau(\pi R^2 t)$$

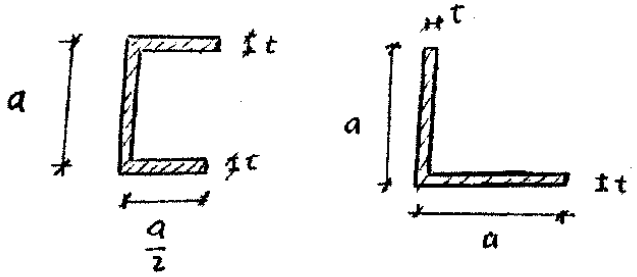
مقاومت پیچشی مقطع ②

$$\tau=\frac{T}{\frac{\sum L t^2}{3}} \Rightarrow T_2=\tau(R t^2)$$

$$\rightarrow \frac{T_1}{T_2}=\frac{\pi R}{t}=16\pi$$

سراسری ۸۹

۵۱- چه رابطه‌ای بین ظرفیت پیچش مقاطع جدار نازک داده شده، برقرار است؟

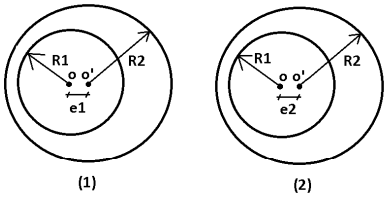


۱) ظرفیت پیچشی هر دو مقطع یکسان است
۲) رابطه‌ای بین ظرفیت پیچشی دو مقطع وجود ندارد
۳) ظرفیت پیچشی مقطع نبشی دو برابر مقطع ناودانی است
۴) ظرفیت پیچشی مقطع ناودانی دو برابر مقطع نبشی است

گزینه ۱

آزاد ۸۸

اگر فاصله مراکز دوایر داخلی و خارجی در میل گردانهای جدار نازک زیر به ترتیب برابر e1 و e2 باشد مقاومت پیچشی میلگردان اول چند برابر میل گردان دوم است؟



۱) $\frac{R_2 - R_1 - e_1}{R_2 - R_1 - e_2}$

۲) $\frac{R_1 + R_2 - e_1}{R_1 + R_2 - e_2}$

۳) $\frac{R_1 + R_2 + e_1}{R_1 + R_2 + e_2}$

۴) $\frac{R_2 - R_1 + e_1}{R_2 - R_1 + e_2}$

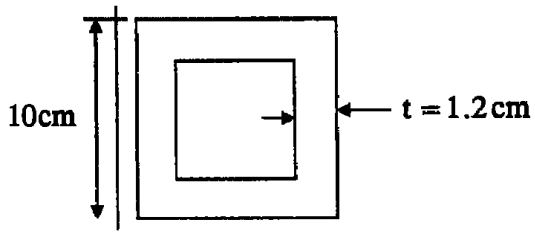
$\tau = \frac{T}{2A_m t} \rightarrow T_1 = \tau(2A_m t_1)$, $T_2 = \tau(2A_m t_2)$ $\rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{t_1}{t_2}$

وقتی شیار ساعت محصور در مقطع یکسان است $A_{m1} = A_{m2}$

$t_1 = R_2 - R_1 - e_1 \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{R_2 - R_1 - e_1}{R_2 - R_1 - e_2}$

تمرین: آزاد ۹۳

۵۷ـ ظرفیت پیچشی مقطع زیر کدام است؟ $\tau_a = 960\ kg/cm^2$



۱) 691200 kgcm

۲) 345600 kgcm

۳) 1382400 kgcm

۴) 172800 kgcm

۱۲-۶- اتصالات تحت اثر پیچش

سراسری ۸۴

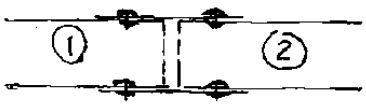
۴۴- انتهای دو لوله ۱ و ۲ به قطر خارجی ۸۰ cm مطابق شکل روبرو در داخل لوله‌ای به قطر داخلی ۸۰ cm قرار گرفته‌اند. هر کدام از لوله‌های ۱ و ۲ با ۲۰ عدد پیچ به قطر ۲ cm بهم وصل شده‌اند. اگر لنگر پیچشی ۲۰ tm به مجموعه وارد شود تنش برشی در پیچ‌ها چقدر است؟

۱) ۷۹۶

۲) ۳۹۸

۳) ۱۹۹

۴) ۹۹/۵



لنگر پیچشی که هر پیچ انتقال می‌دهد

$T_i = f \times R \Rightarrow$ کل $T = 20 \times f \times R \Rightarrow$ هر پیچ $f = \frac{T}{20R} = \frac{20 \times 10^5}{20 \times 40}$

نیروی هر پیچ

$\Rightarrow \tau = \frac{f}{A} = \frac{20 \times 10^5}{20 \times 40 \times (\pi \times 1^2)} = 796 \, kg/cm^2$

سراسری ۹۱

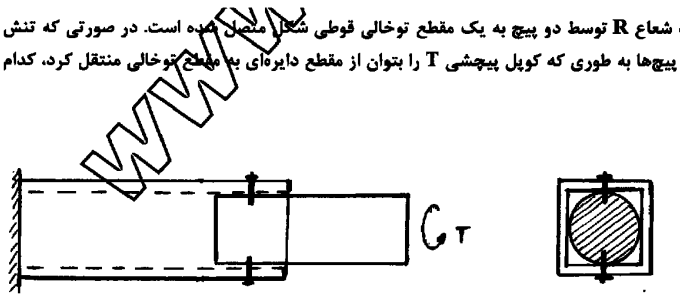
۵۴- یک مقطع توپر دایره‌ای به شعاع R توسط دو پیچ به یک مقطع توخالی قوطی شکل متصل شده است. در صورتی که تنش مجاز پیچ‌ها τ باشد، قطر پیچ‌ها به طوری که کوپل پیچشی T را بتوان از مقطع دایره‌ای به مقطع توخالی منتقل کرد، کدام رابطه زیر است؟

۱) $D=\sqrt{\frac{4T}{\pi.\tau.R}}$

۲) $D=\sqrt{\frac{T}{4\pi.\tau.R}}$

۳) $D=\sqrt{\frac{2T}{\pi.\tau.R}}$

۴) $D=\sqrt{\frac{T}{2\pi.\tau.R}}$



$T = F \times (2R)$

نیروی برشی هر پیچ ← $F=(\frac{\pi D^2}{4})\tau$

$\rightarrow T=\frac{\pi D^2}{4}\tau \times (2R)$

$\rightarrow D=\sqrt{\frac{2T}{\pi \tau R}}$

سراسری ۸۶

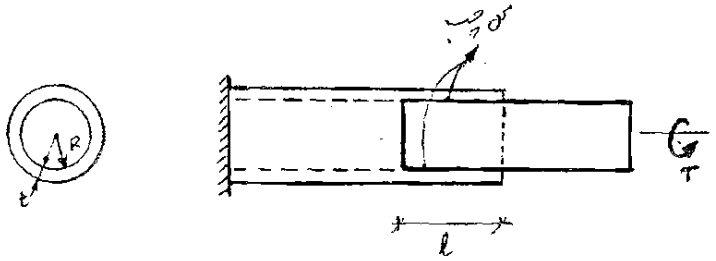
۵۵- یک مقطع توپر دایره‌ای با شعاع R توسط چسب با تنش برشی مجاز τ در داخل مقطع توخالی در طول l متصل شده است. مطلوبست محاسبه طول l بطوریکه لنگر پیچشی T را بتوان از مقطع توپر به مقطع توخالی منتقل کرد.

۱) $l=\frac{T}{\pi R^2.\tau}$

۲) $l=\frac{T}{2\pi R.\tau}$

۳) $l=\frac{T}{2\pi R^2.\tau}$

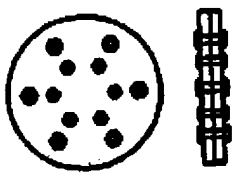
۴) $l=\frac{T}{\pi R.\tau}$



$T = [(\text{مساحت چسب}) \times (\text{تنش برشی}) \tau] \times R = [(l \times 2\pi R) \times \tau] \times R = 2\pi R^2 l \tau \Rightarrow l = \frac{T}{2\pi R^2 \tau}$

آزاد ۸۸

۴۹- در اتصال فلنجی زیر دو نوع پیچ با تنشهای مجاز τ_1 و τ_2 در فواصل R_1 و R_2 از مرکز اتصال قرار دارند. برای اینکه این اتصال فلنجی حداکثر لنگر پیچشی را منتقل کند نسبت $\frac{R_1}{R_2}$ چقدر باید باشد؟ (مدول برشی پیچ‌ها به ترتیب برابر G_1 و G_2 است.)



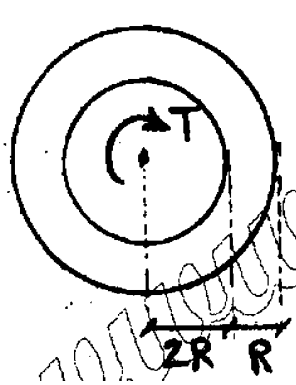
۱) $\frac{G_1\tau_1}{G_2\tau_2}$

۲) $\frac{G_2\tau_2}{G_1\tau_1}$

۳) $\frac{G_2\tau_1}{G_1\tau_2}$

۴) $\frac{G_1\tau_2}{G_2\tau_1}$

آزاد ۹۱



۴۷- مقطع توخالی نشان داده شده تحت پیچش قرار دارد. اگر کرنش برشی در جدار داخلی مقطع برابر با ۰/۰۲ رادیان باشد، تنش برشی حداکثر چند kg/cm^2 می‌باشد؟ $(G = 10^5\ kg/cm^2)$

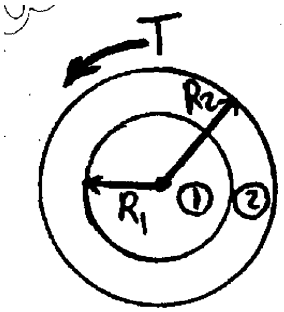
۱) ۱۰۰۰
۲) ۲۰۰۰
۳) ۳۰۰۰
۴) ۴۰۰۰

گزینه ۳

$$\tau_{inner} = 0.02 \times G = 2000\,\frac{kg}{cm^2}$$

$$\frac{\tau_{out}}{\tau_{inner}} = \frac{3R}{2R} \rightarrow \quad \tau_{out} = 3000\,\frac{kg}{cm^2}$$

آزاد ۹۱



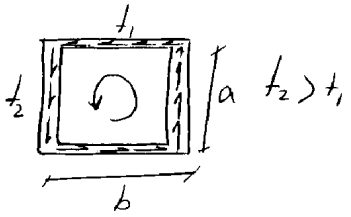
۴۸- در شکل زیر نسبت $\frac{G_1}{G_2}$ چقدر باشد تا تنش برشی حداکثر در هر دو مصالح با هم برابر شود؟ $(R_2 = 3R_1)$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

گزینه ۳

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{R_2 G_2}{R_1 G_1} = 1 \rightarrow \frac{G_1}{G_2} = \frac{R_2}{R_1} = 3$$

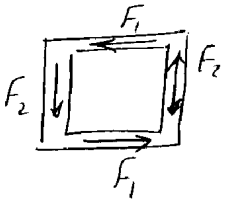
جدار نازک با ضخامت های مختلف :



$\tau_{max} = \frac{T}{2A_m t_1}$ ✓ تنش در جدار نازک تر بیشتر است

$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2$ ✓

سئوال : اگر تنش ها را با یک نیروی F معادل کنیم مقدار F_1 و F_2 ؟



$F_1 = \tau_1 \times (b t_1)$

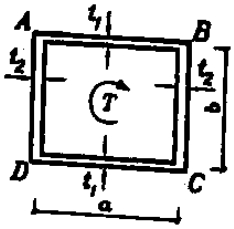
سئوال : ممان بال که افقی از تحمل پیچش؟

$F_1 \times a = \tau_1 (b t_1) a \hookrightarrow = \left(\frac{T}{2A_m t_1}\right)(b t_1)a = \frac{T}{2(ab)}(ab) = \frac{T}{2}$

یا از آدمی : در جدار نازک بسته ممان اضلاع را نمی توان به نسبت J بدست آورد چون فرمول J برای قسمت های مختلف تقاطع یکی J برای کل مقطع است $\left(J = \frac{4A_m^2 t}{p}\right)$

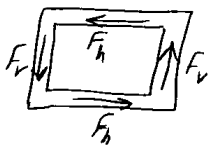
تمرین: آزاد ۸۶

۴۵- در مقطع قوطی شکل زیر سهم وجه های افقی مقطع در تحمل پیچش چند برابر سهم وجه های قائم مقطع می باشد؟



۴) سهم وجه های افقی و قائم در تحمل پیچش برابر است.

۳) $\frac{at_1}{bt_2}$ ۲) $\frac{t_1}{t_2}$ ۱) $\frac{a}{b}$



تنش در جدار افقی $\rightarrow \tau_h = \frac{T}{2A_m t_1} \longrightarrow F_h = \tau_h \times (a t_1) = \frac{Ta}{2A_m}$

تنش در جدار قائم $\rightarrow \tau_v = \frac{T}{2A_m t_2} \longrightarrow F_v = \tau_v (b t_2) = \frac{Tb}{2A_m}$

$\Rightarrow$ ممان ناشی از $F_h = F_h \times b = \frac{Tab}{2A_m}$

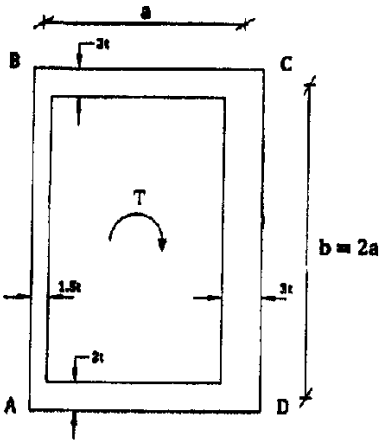
ممان ناشی از F_v = ممان $= F_v \times a = \frac{Tab}{2A_m}$

$\rightarrow$ ممان یکدیگر را خنثی می کنند

سراسری ۹۳

۵۴- **مقطع قوطی مطابق شکل زیر تحت اثر کوپل پیچشی T قرار گرفته است. چند درصد از لنگر پیچشی توسط وجه AB تحمل می‌شود؟ (ابعاد مرکز به مرکز هستند و $t \ll a,b$)**

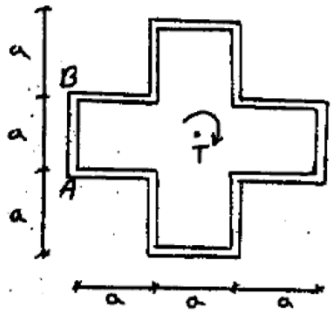
۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۱۵



آزاد ۹۱

۵۰- **چند درصد از لنگر پیچشی اعمال شده توسط قطعه AB تحمل می‌شود؟ (ضخامت تمام اجزاء مقطع یکسان می‌باشد)**

۱) 10%
۲) 15%
۳) 20%
۴) 25%



گزینه ۲

۱- مقدار تنش برشی را در قطعه AB بدست می آوریم

۲- نیروی برشی در قطعه AB را بر اساس تنش بدست آمده محاسبه می کنیم

۳- لنگر ناشی از نیروی برشی بدست آمده را حول مرکز بدست می آوریم:

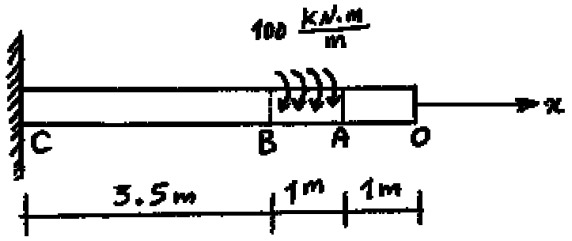
$$\tau = \frac{T}{2A_m t} = \frac{T}{2(5a^2)t} \qquad \rightarrow F_{AB} = \tau \times (at) = \frac{T}{10a} \qquad \rightarrow T_{AB} = F_{AB} \times (1.5a) = \frac{15T}{100}$$

۱۲-۷-تحلیل سازه های تحت پیچش

سراسری ۹۳- دکتری

۲- یک شفت با قطر خارجی ۲۰mm تحت یک لنگر پیچشی یکنواخت بـه مقـدار $۱۰۰\frac{kN.m}{m}$ مؤثر در روی قسمت AB در شکل مفروض است. انـدازهٔ دو کمیـت زیر کدام است؟ $(G = ۸۰\times۱۰^۹\ Pa)$

ماکزیمم تنش برشی τ_{max} برحسب $\frac{N}{m^۲}$، ϕ زاویهٔ چـرخش «O» نسـبت بـه «C» برحسب رادیان



۱) $\phi = ۴۱۸/۳ \ ،\tau_{max} = ۶۳\times۱۰^۹$

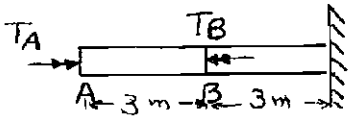
۲) $\phi = ۳۱۸/۳ \ ،\tau_{max} = ۴۳\times۱۰^۹$

۳) $\phi = ۴۱۸/۳ \ ،\tau_{max} = ۴۳\times۱۰^۹$

۴) $\phi = ۳۱۸/۳ \ ،\tau_{max} = ۶۳\times۱۰^۹$

سراسری ۸۲

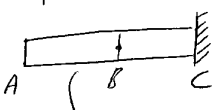
۳۶- میله فولادی با مقطع دایره ای به قطر ۶۰ mm مطابق شکل تحت لنگرهای پیچشی در نقاط A و B قرار گرفته است. لنگر پیچشی اعمال شده در نقطه B برابر است با ۸π کیلونیوتن متر. اگر دوران مقطع B صفر باشد دوران مقطع A چقدر است؟ $G = ۸\times۱۰^۴\ MPa$



۱) ۰,۴۹۴Rad
۲) ۰,۵۳۸Rad
۳) ۰,۶۷۲Rad
۴) ۰,۷۴۱Rad

$\Delta_B = ۰ \longrightarrow F_{BC} = ۰ \longrightarrow T_A = T_B = ۸\pi\times۱۰^۳$ مانند تیری محوری عمل می کنیم

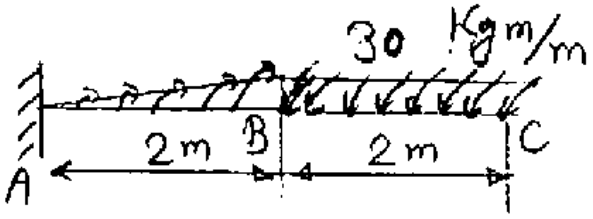
$\varphi_A = \frac{T_A L}{GJ} = \frac{۸\pi\times۳\times۱۰^۳}{۸\times۱۰^{۱۰}\times\frac{\pi}{۲}\times۰.۰۳^۴} = ۰.۷۴۱\ rad$



$J = \frac{\pi}{۲}\times۰.۰۳^۴$

سراسری۸۸

۶۲- میله‌ای به قطر **۴ cm** زیر اثر لنگر پیچشی مطابق شکل روبه‌رو قرار گرفته است. تنش برشی ماکزیمم بر حسب $\frac{kg}{cm^2}$ در آن چندر است؟ لنگر پیچشی در نیمه‌ی سمت راست با شدت ثابت $۳۰ \frac{kgm}{m}$ و در نیمه سمت چپ شدت آن به طور خطی از $۳۰ \frac{kgm}{m}$ به صفر می‌رسد.



۱) $\frac{۷۵۰}{\pi}$

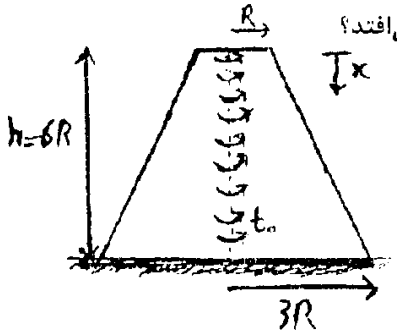
۲) ۱۵۰۰

۳) صفر

۴) $\frac{۱۵۰۰}{\pi}$

آزاد ۹۰

۵۰- سازه نشان داده شده که دارای مقطع مدور توپر غیرمنشوری می‌باشد تحت اثر لنگر پیچشی گسترده یکنواخت به شدت t_0 قرار گرفته است تنش برشی حداکثر در کجا اتفاق می‌افتد؟



۱) $x = \frac{2}{3}R$

۲) $x = 3R$

۳) $x = \frac{3}{2}R$

۴) $x = 6R$

(50) مقدار T در ارتفاع x برابر است با: $T = t_0 x$

حداکثر تنش برشی τ برابر است با: $\tau = \frac{Tr}{J} = \frac{Tr}{\frac{\pi r^4}{2}} = \frac{2T}{\pi r^3}$

(شعاع r در کل استوانه متغیر است)

$= \frac{2t_0 x}{\pi(R+\frac{x}{3})^3}$

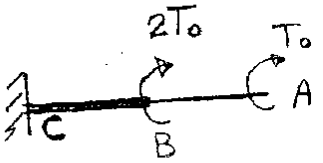
(در اینجا $r = R + \frac{x}{3}$ است)

برای بدست آوردن حداکثر تنش از معادله بدست آمده مشتق می‌گیریم:

$$\tau' = \frac{2t_0\pi(R+\frac{x}{3})^3 - 3\times\frac{1}{3}\times\pi(R+\frac{x}{3})^2\times 2t_0 x}{[\pi(R+\frac{x}{3})^3]^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{3R}{2}$$

تمرین: سراسری۸۶

۵۲- در شکل روبرو AB و BC دارای مقطع دایره به قطر D و ۲D می‌باشند: نسبت تنش‌های برشی ماگزیمم در قسمت AB به قسمت BC چقدر است؟ $\left[\frac{(\tau AB)max}{(\tau BC)max}\right]$



۱) ۱

۲) ۲

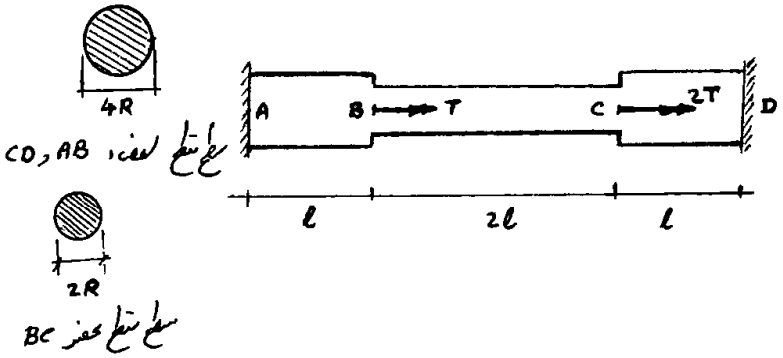
۳) $\frac{8}{3}$

۴) $\frac{4}{3}$

$$\tau_{AB}=\frac{T_0 R}{\frac{\pi}{2}R^4} \qquad \tau_{BC}=\frac{3T_0(2R)}{\frac{\pi}{2}(2R)^4} \longrightarrow \frac{\tau_{AB}}{\tau_{BC}}=\frac{8}{3}$$

سراسری ۹۲

۵۰- عضو زیر، با مقطع دایره‌ای متغیر مطابق شکل تحت دو کوپل پیچشی متمرکز T و ۲T در نقاط B و C قرارگرفته است. عکس العمل‌های تکیه‌گاهی در نقاط A و D کدام است؟



۱) $T_A=\frac{۳۵}{۳۴}T$, $T_D=\frac{۶۷}{۳۴}T$

۲) $T_A=\frac{۳۷}{۳۴}T$, $T_D=\frac{۳۵}{۳۴}T$

۳) $T_A=\frac{۶۷}{۳۴}T$, $T_D=\frac{۳۵}{۳۴}T$

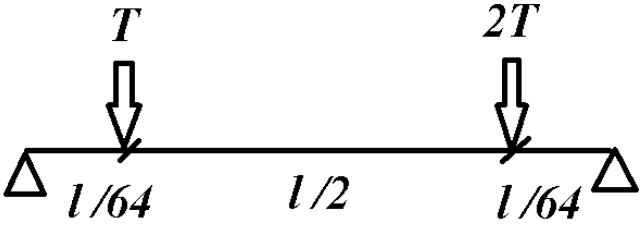
۴) $T_A=\frac{۶۵}{۳۴}T$, $T_D=\frac{۳۷}{۳۴}T$

گزینه ۱

تکیه گاه A را حذف کرده به روش نیرو آنرا بدست می آوریم. تغییر مکان نقطه A را محاسبه و برابر صفر قرار می دهیم. اگر ممان پیچشی مقطع BC برابر J باشد، ممان پیچشی مقطع AB برابر 16J خواهد بود.

$$\frac{T_A L}{16GJ}+\frac{(T_A-T)2L}{GJ}+\frac{(T_A-3T)L}{16GJ}=0 \rightarrow T_A=\frac{35}{34}T$$

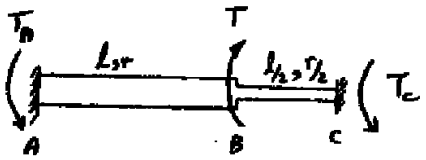
$$\rightarrow T_D=3T-\frac{35}{34}T=\frac{67}{34}T$$



$$T_D=\frac{T\frac{l}{64}+2T\times\frac{33l}{64}}{\frac{34l}{64}}=\frac{67}{34}T$$

سراسری ۹۱- دکتری

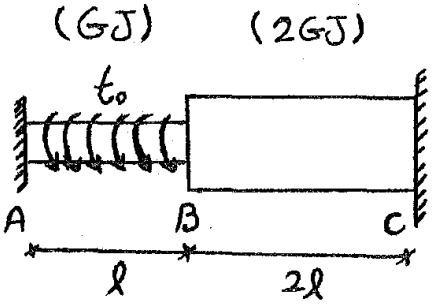
۵- دو میله هم جنس با مقطع دایره که طول و شعاع مقطع آنها روی شکل مشخص شده است به همدیگر جوش داده شده‌اند و به صورت گیردار به نقاط A و B متصل گردیده‌اند. اگر مجموعه در نقطه B توسط لنگر پیچشی T بارگذاری شود، نسبت عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی $\frac{T_A}{T_C}$ چقدر است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۸

آزاد ۹۲

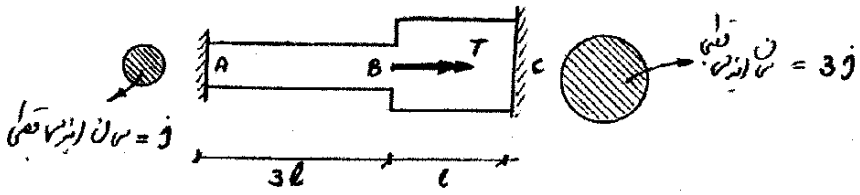
۵۰- در سازه نشان داده شده لنگر پیچش گسترده یکنواخت به شدت t_0 به قسمت AB اعمال شده است زاویه پیچش در B کدام است؟ (صلبیت پیچشی عضو BC دو برابر AB می‌باشد)



۱) $\frac{t_0\ell^2}{4GJ}$
۲) $\frac{t_0\ell^2}{2GJ}$
۳) $\frac{t_0\ell^2}{GJ}$
۴) $\frac{2t_0\ell^2}{GJ}$

سراسری ۸۹

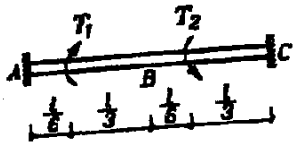
۵۲- عضو با مقطع دایروی مطابق شکل تحت کوپل پیچشی T در نقطه B قرار دارد.
مطلوبست تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در نقاط A و C.



۱) $T_A = \frac{9T}{10}$ و $T_C = \frac{T}{10}$
۲) $T_A = \frac{3T}{10}$ و $T_C = \frac{7T}{10}$
۳) $T_A = \frac{T}{10}$ و $T_C = \frac{9T}{10}$
۴) $T_A = \frac{7T}{10}$ و $T_C = \frac{3T}{10}$

آزاد ۸۸

۵۱- در تیر زیر نسبت $\frac{T_1}{T_2}$ چقدر باشد تا پیچش وسط تیر صفر شود؟ (GJ = Const)

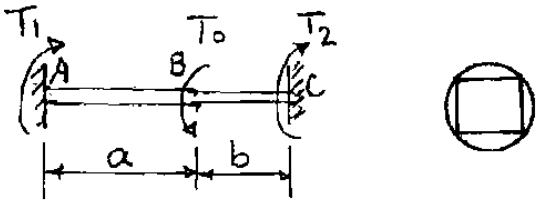


۱) 3 ۲) 2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

گزینه ۲

سراسری ۸۴

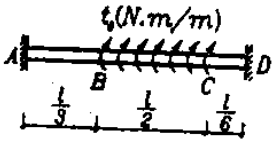
۴۵- در شکل روبرو قسمت AB با مقطع دایره به شعاع R و قسمت BC با مقطع مربع به شعاع $a = R\sqrt{2}$ می‌باشد. برای اینکه $T_1 = T_2$ باشد، نسبت $\frac{a}{b}$ کدام است؟ ($J_{\text{مربع}} = 0/141\, a^4$ برای مربع)



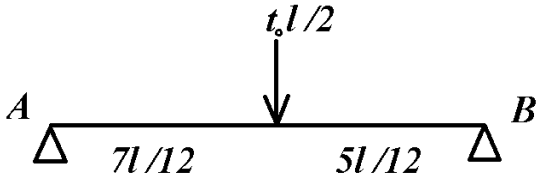
۱) ۲٫۷۸۵
۲) ۱٫۳۹
۳) ۱
۴) ۰٫۳۵۹

آزاد ۸۶

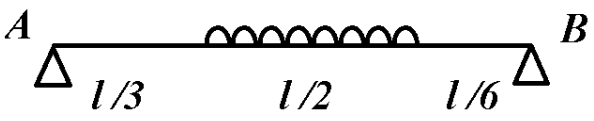
۴۸- در تیر زیر زاویه پیچش وسط تیر چقدر است؟ (GJ = con s t)



۱) $\frac{11t_0 l^2}{144GJ}$ ۲) $\frac{7t_0 l^2}{144GJ}$ ۳) $\frac{13t_0 l^2}{144GJ}$ ۴) $\frac{17t_0 l^2}{144GJ}$



$T_A = \frac{5}{12} \times \frac{t_0 L}{2} = \frac{5t_0 L}{24} \rightarrow T_B = \frac{7t_0 L}{24}$



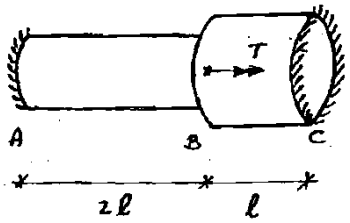
b) $\varphi = \frac{1}{GJ}\left(\frac{7t_0 L}{24} \times \frac{L}{2} - \frac{t_0 L}{3} \times \frac{L}{6}\right) = \frac{13}{144}\frac{t_0 L^2}{JG}$

تمرین: سراسری ۸۵

۵۰- عضوی با مقطع دایروی مطابق شکل تحت کوپل پیچشی T در مقطع B می‌باشد. مطلوبست تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در نقاط A و C (نقاط A و C بصورت گیردار کامل می‌باشند)

J= ممان اینرسی قطبی مقطع در ناحیه AB

۴J= ممان اینرسی قطبی در ناحیه BC



۱) $T_A = \frac{T}{۹}$, $T_B = \frac{۸T}{۹}$

۲) $T_A = \frac{۶T}{۷}$, $T_B = \frac{T}{۷}$

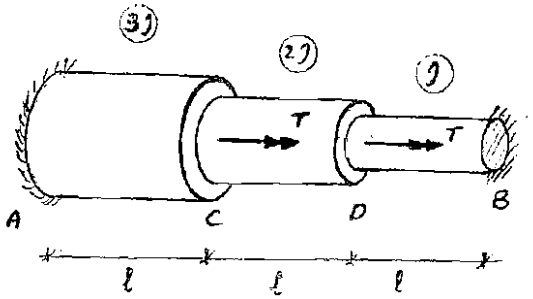
۳) $T_A = \frac{۸T}{۹}$, $T_B = \frac{T}{۹}$

۴) $T_A = \frac{T}{۷}$, $T_B = \frac{۶T}{۷}$

گزینه ۱

تمرین: سراسری ۸۶

۵۴- عضو شکل مقابل با مقطع دایره‌ای پله‌ای تحت اثـر دو لنگر پیچشی T در نقاط C و D قـرار گرفته است. نقاط A و B بصورت گیردار می‌باشند. مطلوبست عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی نقاط A و B:



۱) $T_A = \frac{۵}{۷}T$, $T_B = \frac{۹}{۷}T$

۲) $T_A = \frac{۹}{۷}T$, $T_B = \frac{۵}{۷}T$

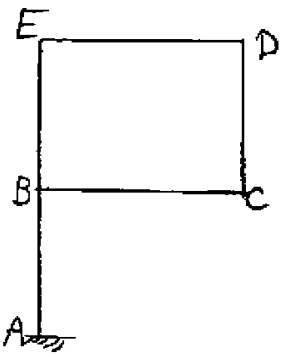
۳) $T_A = \frac{۷}{۱۱}T$, $T_B = \frac{۱۵}{۱۱}T$

۴) $T_A = \frac{۱۵}{۱۱}T$, $T_B = \frac{۷}{۱۱}T$

گزینه ۴

سراسری۸۸

۶۱- صفحه BCDE به میله AE که دارای مقطع دایره توپر به شعاع ۵ cm است کاملاً متصل است و عمود بر آن صفحه یاد وارد می‌شود. به طوری که نیروی وارده صد کیلوگرم بر هر متر مربع است. $BC = ۲\ m$ و $CD = ۱/۵\ m$ می‌باشد. مقدار تنش برشی ماکزیمم حاصل از فقط پیچش در AB بر حسب $\frac{kg}{cm^۲}$ برابر است با:

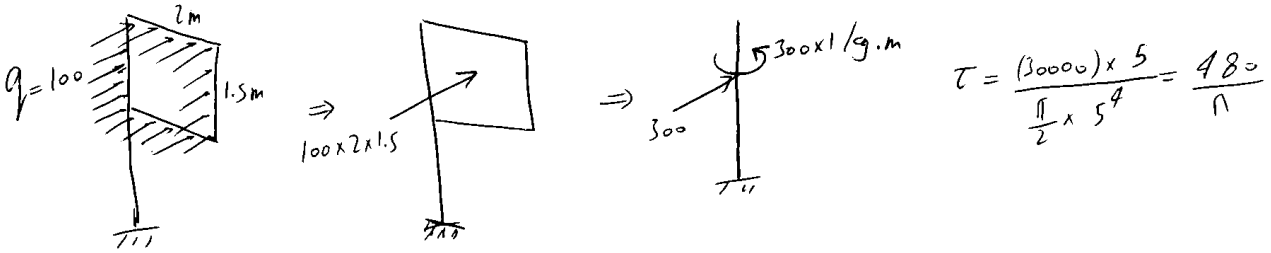


۱) $\frac{۴۸۰}{\pi}$

۲) ۹۶۰π

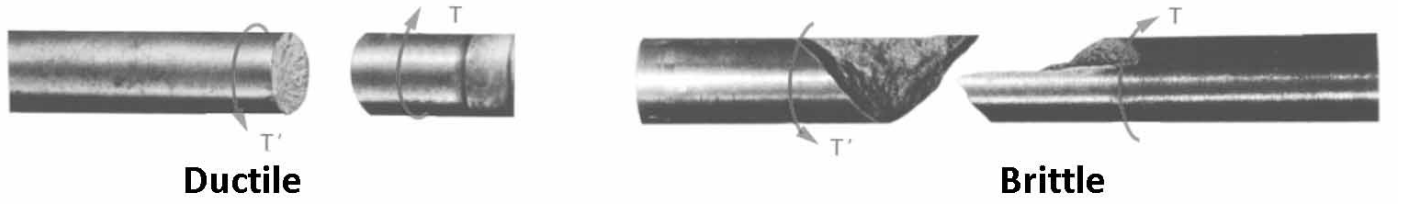
۳) ۴۸π

۴) $\frac{۹۶۰}{\pi}$



-مواد شکل پذیر در پیچش در صفحه عمود بر امتداد خود خراب می شوند.

-مواد ترد در پیچش در صفحه ای که با محور طولی زاویه ۴۵ درجه می سازدخراب می شوند و در کشش عمود بر امتداد خود خراب می شوند.



سراسری۷۴

۴ـ کدامیک ازگزینه‌های زیر صحیح می‌باشد؟

۱) میله‌ای از مصالح ترد در پیچش خالص در مقطعی با شیب ۴۵° نسبت به محور طولی و در کشش در مقطعی عمود بر محور طولی دچارگسیختگی می‌گردد.

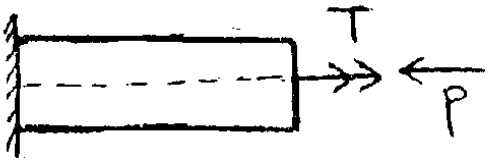
۲) میله‌ای از مصالح نرم درکشش در مقطعی عمود بر محور میله و در پیچش خالص در مقطعی با شیب ۴۵° نسبت به محور طولی دچارگسیختگی می‌گردد.

۳) میله‌های ساخته شده از مصالح نرم درکشش تحت زاویه ۶۰° نسبت به محور طولی و در پیچش در مقطعی عمود بر محور طولی گسیخته می‌گردند.

۴) هیچکدام از موارد بالا.

آزاد ۹۰

۴۹- تیر نشان داده شده که از مصالح ترد چدنی تشکیل شده است و دارای مقطعی مدور می‌باشد تحت لنگر پیچشی T و نیروی محوری P قرار گرفته است زاویه شکست میله نسبت به محور آن کدام است؟

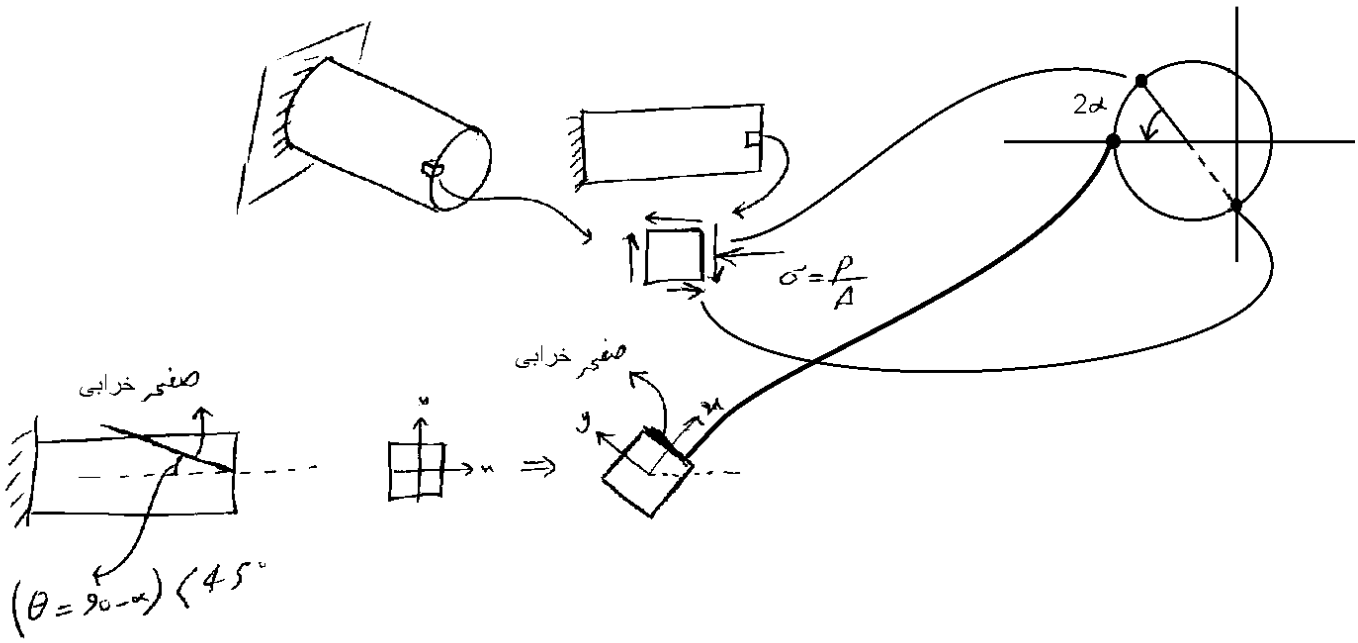


۱) ۴۵ درجه در جهت خلاف عقربه‌های ساعت

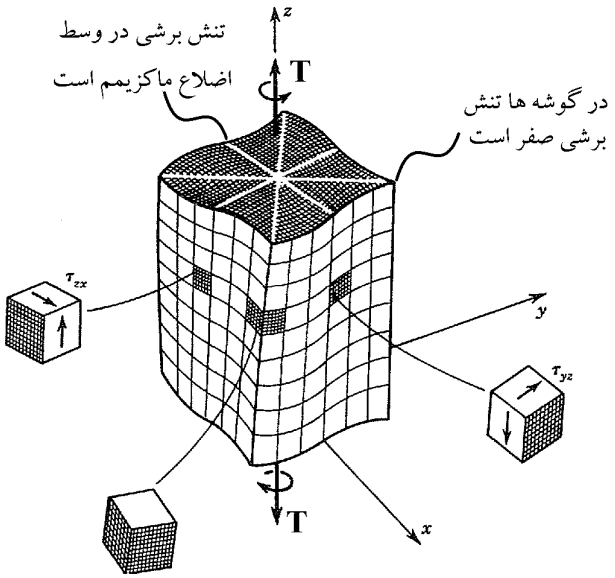
۲) کمتر از ۴۵ درجه در جهت خلاف عقربه‌های ساعت

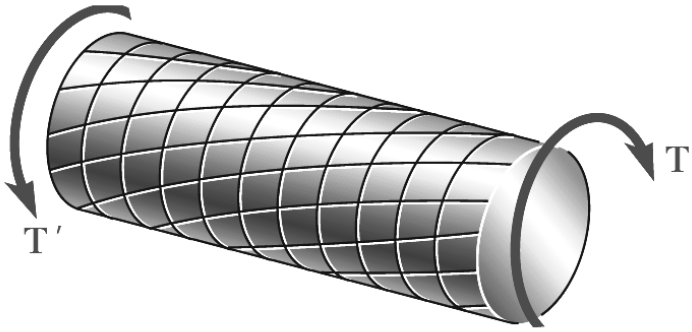
۳) بیشتر از ۴۵ درجه در جهت عقربه‌های ساعت

۴) کمتر از ۴۵ درجه در جهت عقربه‌های ساعت

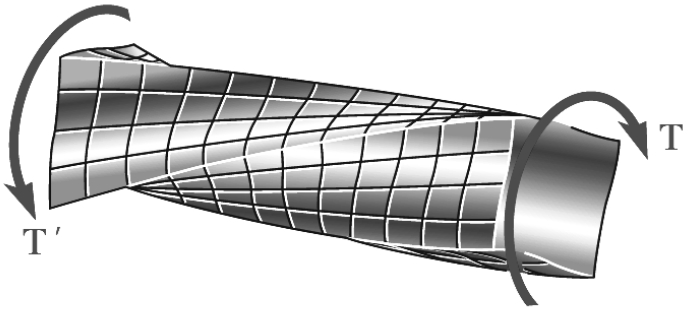


۱۲-۸-مقاطع غیر دایروی





(a)

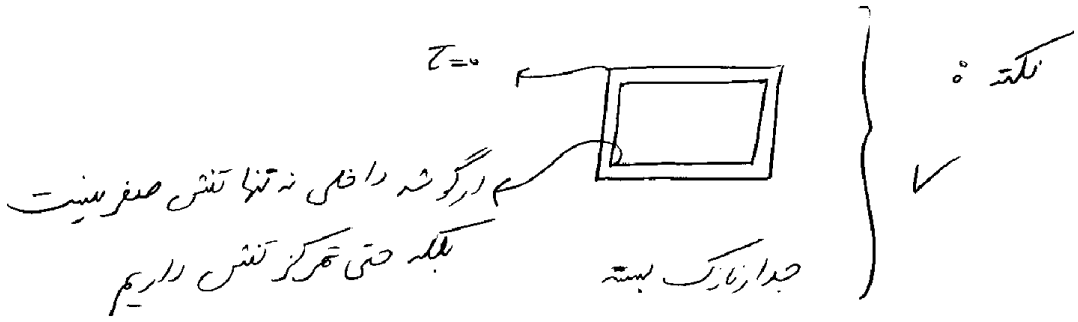


(b)

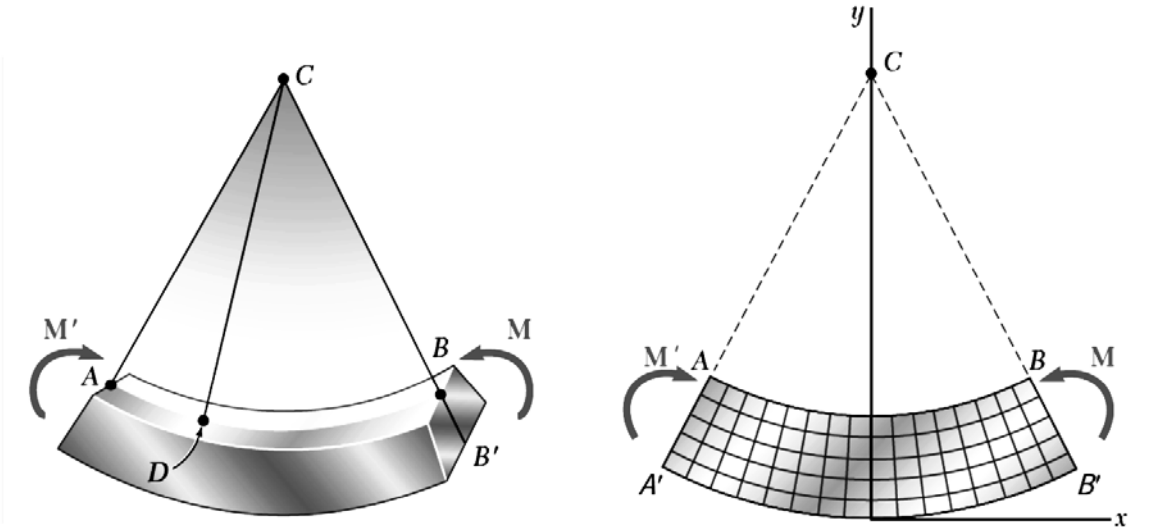
-مقاطع پس از پیچش مسطح باقی نمی مانند و اگر در مقابل تابیدگی مقید شده باشند علاوه بر تنش های برشی، تنش های طولی نیز خواهیم داشت.

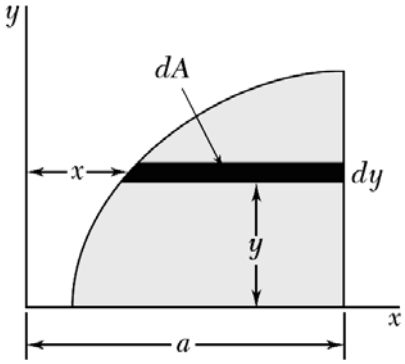
-تنش های برشی در گوشه ها ی خارجی صفر است

-تنش برشی ماکزیمم معمولا در وسط اضلاع اتفاق می افتد

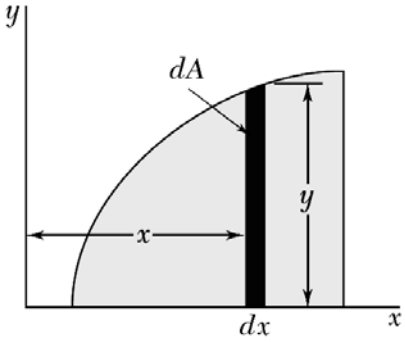


۱۳-خمش

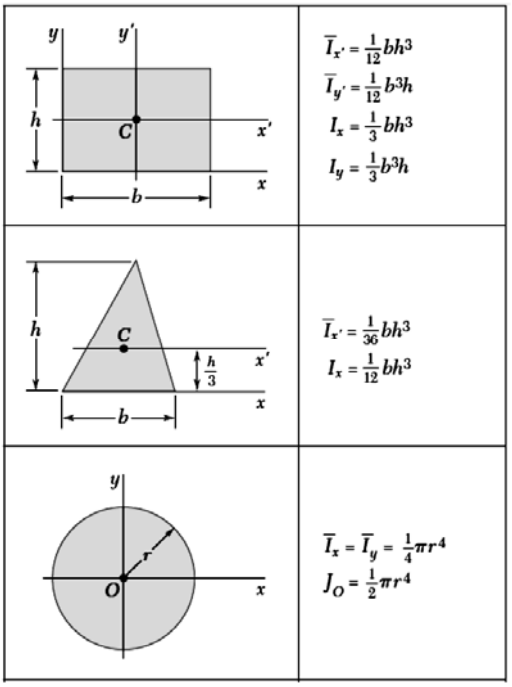




$dI_x = y^2\,dA$



$dI_y = x^2\,dA$



مفهوم ممان اینرسی

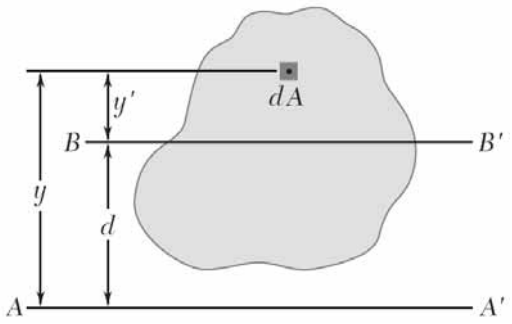
$$I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA$$

قضیه محورهای موازی؟

$$I_{BB'} = \int (y')^2 dA$$

$$I_{AA'} = \int (y)^2 dA$$

$$I_{AA'} = I_{BB'} + A(d)^2$$

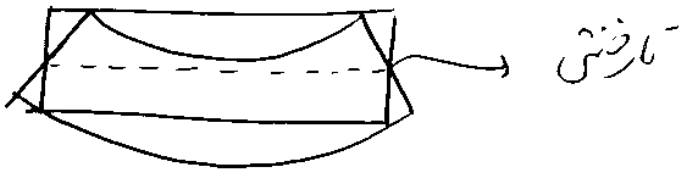


ممان اینرسی مقاطع جدار نازک؟

ممان اینرسی مستطیل مایل؟

تعریف خمش خالص؟

تار خنثی؟

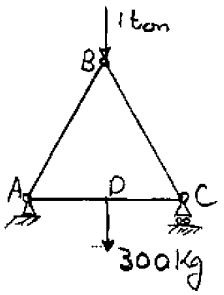


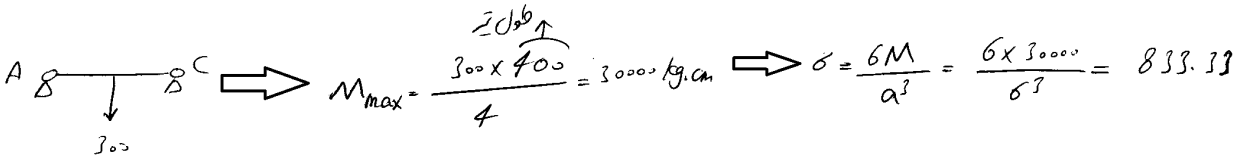
مفهوم اساس مقطع:

سراسری ۸۸

۶۵- در شکل روبه‌رو هر سه میله به مقطع مربع به طول ضلع ۶ cm می‌باشند. جنس هر سه میله از فولاد و طول هر کدام ۴ متر است. تنش خمشی در مقطع D در وسط ضلع AC چقدر است؟ (بر حسب کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع)

۱) ± ۸۳۳
۲) ± ۵۵۵
۳) ± ۳۶۱۱
۴) ± ۱۲۵۰

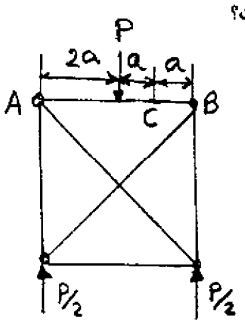


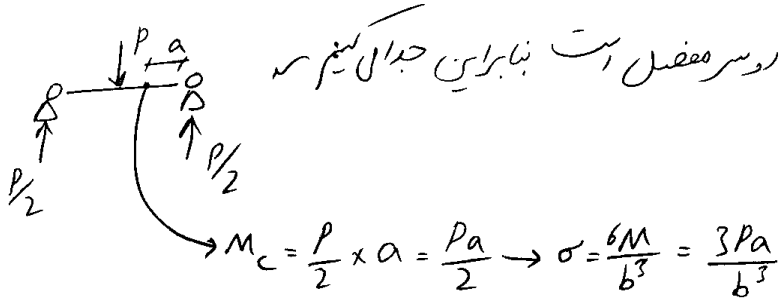


سراسری ۸۷

۶۱- در خرپای شکل روبرو میلهٔ AB به مقطع مربع و به طول ضلع b است. تنش خمشی در نقطه C چقدر است؟

۱) $\frac{3pa}{b^3}$
۲) $\frac{p}{b^2}$
۳) $\frac{3pa}{2b^3}$
۴) $\frac{p}{2b^2}$

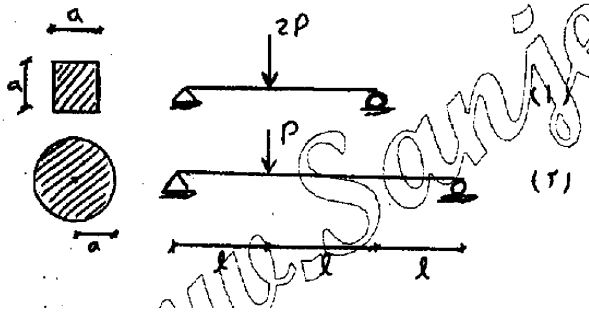




AB روسر مفصل است بنابراین جدا کنیم

آزاد ۹۱

۵۵- اگر تنش خمشی حداکثر در تیر شماره ۱ برابر با $60 kg/cm^2$ باشد آن گاه تنش خمشی حداکثر در تیر شماره ۲ چند kg/cm^2 می‌باشد؟



۱) $\frac{80}{3\pi}$ ۲) $\frac{20}{\pi}$

۳) $\frac{40}{3\pi}$ ۴) $\frac{70}{2\pi}$

گزینه ۱

$$\sigma_1 = 6\frac{\left(\frac{(2P)(2L)}{4}\right)}{a^3} = 60 \quad \rightarrow \frac{PL}{a^3} = 10$$

با توجه به اینکه مقدار لنگر حداکثر در تیر ۲ برابر $\frac{2PL}{3}$ می باشد، مقدار تنش در تیر ۲ برابر است با:

$$\sigma_2 = \frac{\left(\frac{2PL}{3}\right)a}{\frac{\pi a^4}{4}} = \frac{8}{3\pi} \times \frac{PL}{a^3} = \frac{8}{3\pi} \times 10 = \frac{80}{3\pi}$$

سراسری۸۶

۵۶- اگر σ_1 تنش ماگزیمم خمشی در تیر شکل الف و σ_2 تنش ماگزیمم خمشی در تیر شکل ب باشد نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ چقدر است؟

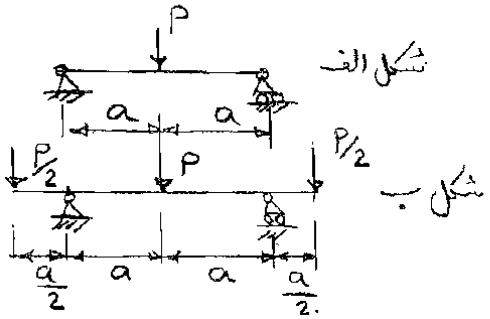
(مقطع هر دو تیر یکی است)

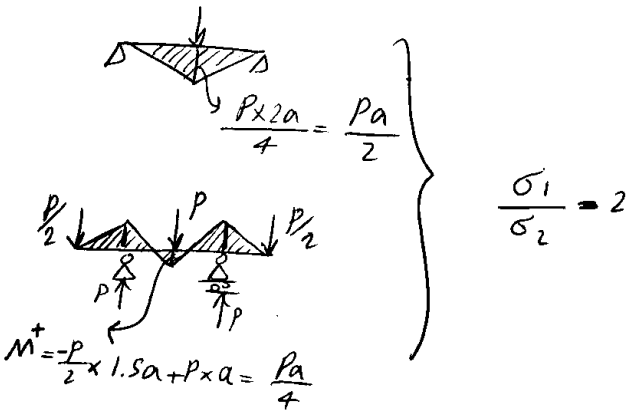
۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱

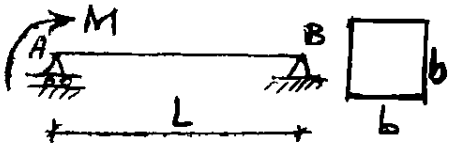
۴) ۲





سراسری ۹۲

۵۴- چنانچه بخواهیم در تیر زیر، با مقطع مربع، تنش مجاز کششی و فشاری، مقادیر یکسان σ_a را داشته باشیم، حداقل مقدار b، کدام است؟



۱) $\sqrt[3]{\frac{6M}{G_a}}$

۲) $\sqrt[3]{\frac{3M}{G_a}}$

۳) $\sqrt{\frac{3M}{G_a}}$

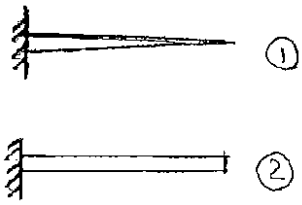
۴) $\sqrt{\frac{6M}{G_a}}$

گزینه ۱

$$\sigma_a = \frac{6M}{bh^2} \rightarrow \sigma_a = \frac{6M}{b^3} \rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{6M}{\sigma_a}}$$

سراسری ۸۴

۴۷- دو تیر ۱-و-۲-دارای طول و پهنای یکسان می‌باشند، ارتفاع هر دو تیر در تکیه‌گاه یکی است ولی تیر یک با ارتفاع متغیر با تغییرات خطی و تیر دو با ارتفاع ثابت است. زیراثر بار گستردهٔ یکنواخت، نسبت $\frac{\sigma_{1max}}{\sigma_{2max}}$ در وسط طول تیرها چقدر است؟



۱) ۴

۲) ۲

۳) ۱

۴) $\frac{1}{2}$

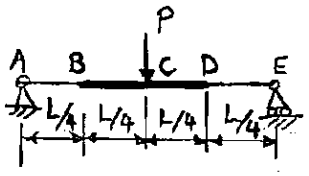
بارگذاری یکسان است و بنابراین $M1=M2$. یعنی لنگر ها یکسان هستند.

ولی تنش در مقاطع متفاوت است:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{Mc_1}{I_1} = \frac{6M}{b\left(\frac{h}{2}\right)^2} = \frac{24M}{bh^2} \\ \sigma_2 &= \frac{Mc_2}{I_2} = \frac{6M}{bh^2}\end{aligned}\right\} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 4$$

سراسری۸۵

۴۳- تیر شکل روبرو به مقطع مستطیل به پهنای ثابت است که ارتفاع قسمت BD دو برابر ارتفاع قسمت‌های دیگر می‌باشد. اگر تمرکز تنش صرفنظر شود تنش ماگزیمم مقطع C چند برابر تنش ماگزیمم مقطع B است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) $\frac{1}{2}$

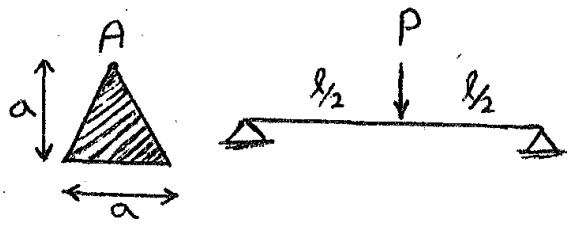
۴) $\frac{1}{4}$

$$M_C = 2M_B$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_C &= \frac{6M_C}{b(2h)^2} = \frac{3M_C}{2bh^2} \\ \sigma_B &= \frac{6M_B}{bh^2}\end{aligned}\right\} \frac{\sigma_C}{\sigma_B} = \frac{M_C}{4M_B} = \frac{1}{2}$$

آزاد ۹۲

۵۳- در تیر ساده نشان داده شده تغییر طول تار فوقانی تیر (رأس A) تحت بار P کدام است؟ (E مدول الاستیسیته مصالح می‌باشد)



۱) $\frac{P\ell^2}{Ea^3}$

۲) $2\frac{P\ell^2}{Ea^3}$

۳) $3\frac{P\ell^2}{Ea^3}$

۴) $4\frac{P\ell^2}{Ea^3}$

گزینه ۳

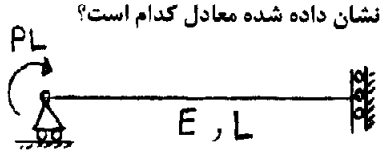
تار فوقانی تحت اثر فشار ناشی از خمش قرار دارد و طول آن کاهش می یابد. تنش فشاری وارد بر تار فوقانی در طول تیر متغیر است. در وسط تیر که لنگر ماکزیمم است، تنش فشاری برابر است با $\sigma = \frac{M\left(\frac{2a}{3}\right)}{I} = \frac{\left(\frac{PL}{4}\right)\left(\frac{2a}{3}\right)}{\frac{a^4}{36}} = \frac{6PL}{a^3}$ ولی در ابتدا و انتهای تیر برابر صفر است.

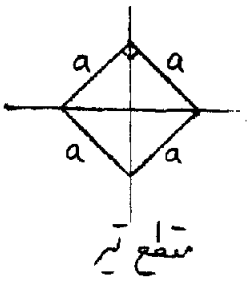
با توجه به اینکه تغییرات لنگر به صورت خطی می باشد، می توان برای محاسبه تغییر طول تار از تنش میانگین استفاده کرد:

$$\Delta L = \frac{\sigma_{ave} L}{E} = \frac{\left(\frac{1}{2}\frac{6PL}{a^3}\right)L}{E} = \frac{3PL^2}{Ea^3}$$

سراسری ۹۳

۴۹- تغییر طول تار فوقانی در تیر با مقطع نشان داده شده معادل کدام است؟





۱) $۶\sqrt{۲}\frac{PL^۲}{Ea^۳}$

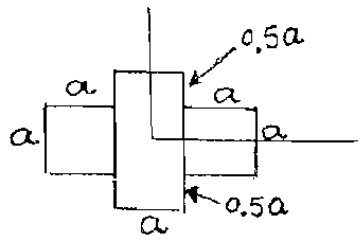
۲) $۲\sqrt{۲}\frac{PL^۲}{Ea^۳}$

۳) $\sqrt{۲}\frac{PL^۲}{Ea^۳}$

۴) $۱۲\sqrt{۲}\frac{PL^۲}{Ea^۳}$

سراسری ۸۴

۴۶- مقطع تیری مطابق شکل از چسبانیدن سه قسمت بهم تشکیل شده است. اگر لنگر خمشی M حول محور افقی تنش ماگزیمم σ_1 و لنگر خمشی M حول محور قائم تنش ماگزیمم σ_2 را ایجاد کند، نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ چیست؟



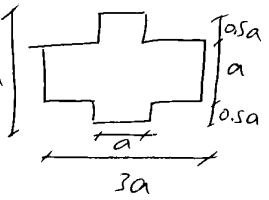
۱) $\frac{۱۵}{۲۸}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۲۸}{۱۵}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

σ_1 حول محور افقی $= \frac{M(a)}{\frac{a(2a)^3}{12} + 2\left[\frac{a^3 \times a}{12}\right]} = \frac{6M}{5a^2}$



σ_2 حول محور قائم $= \frac{M(1.5a)}{\frac{a(3a)^3}{12} + 2\left[\frac{0.5a(a)^3}{12}\right]} = \frac{9M}{14a^2} \longrightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{6 \times 14}{9 \times 5} = \frac{28}{15}$

سراسری ۸۷

۶۰- **میله‌ای دارای مقطعی به شکل لوله با ضخامت کم t و بشعاع R است. یک بار زیر اثر لنگر خمشی M و بار دوم زیر اثر لنگر پیچشی T=M قرار می‌گیرد.نسبت تنش فشاری ایجاد شده در حالت اول به حالت دوم چقدر است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

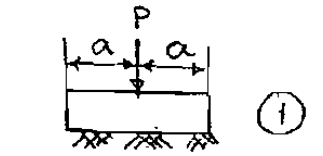
در حالت اول: $\sigma_1 = \frac{MR}{\pi R^3 t}$

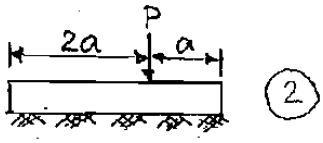
در حالت دوم: $\sigma_2 = \frac{MR}{2\pi R^3 t}$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2$$

سراسری ۸۴

۵۸- بعد دیگر پی‌های نشان داده شده در شکل روبرو مساویست. تنش‌های ماگزیمم وارد بر خاک به ترتیب σ_1 و σ_2 فرض می‌شود، نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ چیست؟





۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱٫۵

۴) $\frac{۳}{۴}$

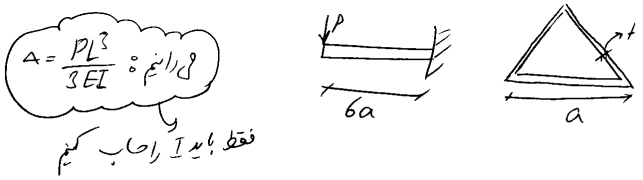
فرض کنیم b بعد دیگر پی باشد

$$\sigma_1 = \frac{P}{2ab} \qquad \sigma_2 = \frac{P}{3ab} + \frac{\overbrace{(P \times 0.5a)}^{\text{لنگر}} \times 1.5a}{\frac{(3a)^3 b}{12}} = \frac{2P}{3ab} \longrightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{3}{4}$$

سراسری ۸۸

۶۶- مقدار جابه‌جایی قائم انتهای تیر کنسول به طول $6a$ بر اثر بار قائم P در انتهای آن کدام است؟ (مقطع تیر قوطی به شکل مثلث متساوی الاضلاع با هر ضلع به طول a و ضخامت جداره t می‌باشد و مدول ارتجاعی نیز برابر E است.)

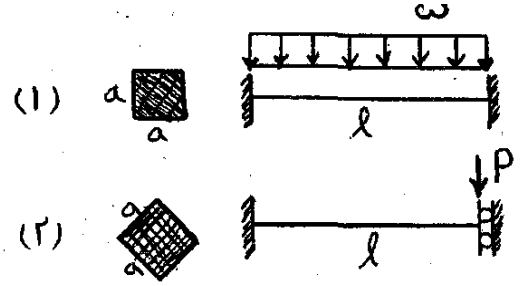
۱) $144\sqrt{3}\frac{P}{Et}$ ۲) $144\frac{P}{Et}$ ۳) $288\frac{P}{Et}$ ۴) $216\sqrt{3}\frac{P}{Et}$



$$I' = \left(\frac{a\times\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}{36}\right)' = \left(\frac{\sqrt{3}a^4}{96}\right)' = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}(a)' = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}(2\sqrt{3}t) = \frac{a^3t}{4}$$

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{P(6a)^3}{3E\frac{a^3t}{4}} = 288\frac{P}{Et}$$

آزاد ۹۲



۵۵- مقدار شدت بار گسترده (ω) چقدر باشد تا تنش خمشی حداکثر در هر دو تیر با مقاطع نشان داده شده با هم برابر شود؟

۱) $\omega = 6\frac{P}{\ell}$ ۲) $\omega = \sqrt{2}\frac{P}{\ell}$

۳) $\omega = \frac{6\sqrt{2}}{2}\frac{P}{\ell}$ ۴) $\omega = 6\sqrt{2}\frac{P}{\ell}$

گزینه ۴

لنگر خمشی در تیر ها برابر است با:

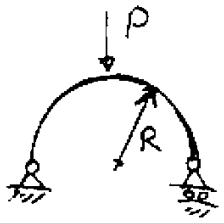
$$M_1 = \frac{wl^2}{12}$$
$$M_2 = \frac{PL}{2}$$

و تنش خمشی برابر است با:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{6M_1}{a^3} = \frac{wl^2}{2a^3}\\ \sigma_2 &= \frac{M_2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{a^4}{12}} = \frac{3\sqrt{2}PL}{a^3}\end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \sigma_1 = \sigma_2 \quad \rightarrow \quad w = \frac{6\sqrt{2}P}{l}$$

سراسری۸۸

۶۴- قوسی به شکل نیم دایره مطابق شکل، زیر اثر نیروی قائم **P** در رأس می‌باشد. مقطع قوس به شکل دایره به شعاع **r** می‌باشد. ماکزیمم تنش خمشی در آن چه مقدار است؟

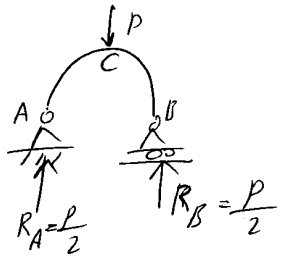


۱) $\frac{PR}{2\pi r^3}$

۲) $\frac{2PR}{\pi r^3}$

۳) $\frac{PR}{\pi r^3}$

۴) $\frac{PR}{2\pi r^4}$



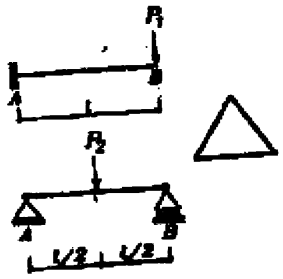
مانند تیر کنسول روبرو است M_{max} در وسط

لنگر ماکزیمم در وسط اتفاق می افتد

$$M_C = R_B \times R = \frac{PR}{2} \Rightarrow \sigma = \frac{Mr}{\frac{\pi}{4}r^4} = \frac{(\frac{PR}{2})r}{\frac{\pi}{4}r^4} = \frac{2PR}{\pi r^3}$$

آزاد ۸۸

۵۳- دو تیر زیر دارای مقطع مثلثی مطابق شکل می باشند. بار P_2 چقدر باشد تا تنش خمشی کششی ماکزیمم دو تیر مساوی شوند؟



۱) $2P_1$ ۲) $4P_1$ ۳) $8P_1$ ۴) $16P_1$

$$M^-_{max} = P_1 L$$
$$M^+_{max} = 0$$

از راست ← لنگر ⊖ ← تنش کششی $\sigma = \frac{M \times 2h/3}{I} = \frac{2P_1 Lh}{3I}$

$$\frac{2P_1 Lh}{3I} = \frac{P_2 Lh}{12I} \rightarrow P_2 = 8P_1$$

از چپ ← لنگر ⊕ ← تنش کششی $\sigma = \frac{M \times h/3}{I} = \frac{(\frac{P_2 L}{4}) \times \frac{h}{3}}{I} = \frac{P_2 Lh}{12I}$

سراسری۸۶

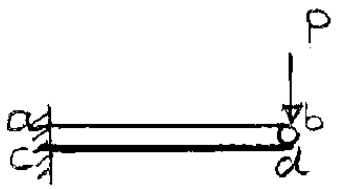
۶۰- تیر یک سرگیردار ab توسط غلتکی روی تیر یک سرگیردار cd تکیه می‌کند و نیروی p مطابق شکل در نقطهٔ b اثر می‌کند.مقطع هر دو تیر مستطیل با پهنای مساوی است ولی ارتفاع مقطع تیر cd دو برابر ارتفاع مقطع تیر ab است. $\frac{(\sigma_{ab})_{max.}}{(\sigma_{cd})_{max}}$ چقدر است؟

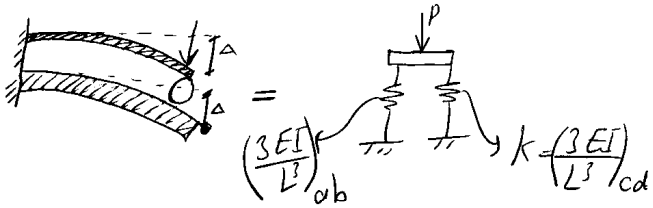
۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{1}{4}$

۳) ۱

۴) ۲





چون Δ ها برابرند نیرو به نسبت سختی تقسیم می‌شود و چون ارتفاع cd دو برابر است

$$\left.\begin{array}{l} I_{cd}=(2^3)\times I_{ab} \\ \rightarrow I_{cd}=8\,I_{ab} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{M_{ab}}{M_{cd}}=\frac{1}{8}$$

از طرفی از آنجا که $\sigma=\frac{6M}{bd^2}$ و با توجه به این که d^2 رابطه عکس دارد و چون $d_{cd}=2d_{ab}$

$$\frac{\sigma_{ab}}{\sigma_{cd}}=4\left(\frac{M_{ab}}{M_{cd}}\right)=4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

تمرین: سراسری ۸۰

میله‌ای به قطر d زیر اثر لنگر پیچشی T_W قرار می‌گیرد و در آن تنش برشی τ_W به‌وجود می‌آید. اگر این میله زیر اثر لنگر خمشی M_W قرارگیرد، در آن تنش عمودی σ_W به‌وجود می‌آید. با فرض اینکه $\tau_W = ۰/۶\sigma_W$ باشد، مقدار α در رابطهٔ $T_W = \alpha M_W$، کدام است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۱/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۶

$$\left.\begin{array}{l} \tau_w=\dfrac{T_wR}{\frac{\pi}{2}R^4}=\dfrac{2T_w}{\pi R^3} \\ \sigma_w=\dfrac{M_wR}{\frac{\pi}{4}R^4}=\dfrac{4M_w}{\pi R^3} \\ \tau_w=0.6\sigma_w \end{array}\right\} \rightarrow T_w=?\,M_w$$

تمرین: سراسری ۸۲

۳۴- میله ای که مقطع آن دایره ای است زیر اثر لنگر پیچشی T دارای تنش برشی ماگزیمم ۴۰ MPa می باشد. اگر همین میله زیر اثر لنگر خمشی M که مقدار آن مساوی T است قرار گیرد تنش برشی ماگزیمم آن چقدر می شود؟

۱) ۸۰ ۲) ۲۰ ۳) $۴۰\sqrt{۲}$ ۴) ۴۰

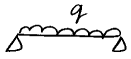
گزینه ۱

تمرین: سراسری ۸۴

۵۶- دو تیر سادهٔ آلومینیمی و فولادی با ابعاد یکسان زیراثر وزن خود قرار دارند. نسبت $\frac{\sigma_a}{\sigma_s}$ چیست؟

$$(E_s = ۳E_a = ۲/۱\times۱۰^۶ \frac{kg}{cm^۲} \ , \ \gamma_s = ۳\gamma_a = ۷/۸ \frac{t}{m^۳})$$

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$



منظور از تیر ساده همان تیر دوسر مفصل است و تحت اثر وزن خود یعنی بار گسترده یکنواخت داریم:

مقدار M را برای هر دو حالت محاسبه می کنیم:

آلومینیم $q_a = \gamma_a \times A = \frac{۷.۸}{۳} \times A \Rightarrow M_a = \frac{q_a L^۲}{۸} = \frac{(\frac{۷.۸}{۳})AL^۲}{۸}$

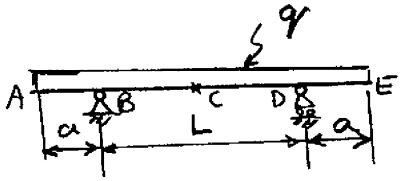
فولاد $q_s = \gamma_s \times A = ۷.۸ \times A \Rightarrow M_s = \frac{۷.۸AL^۲}{۸}$

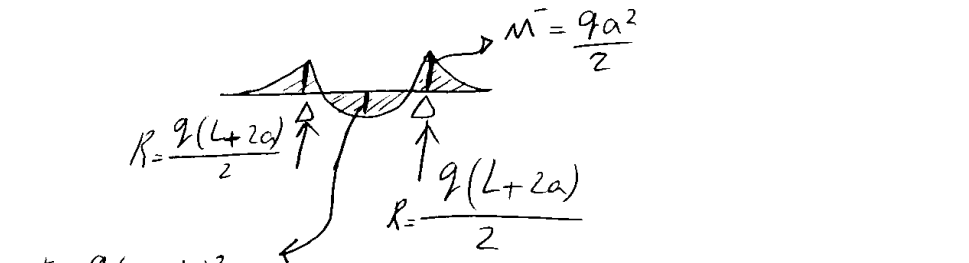
گام بعدی محاسبه تنش می باشد: از آنجا که شکل مقطع برای هر دو حالت یکسان است، در رابطه $\sigma = \frac{Mc}{I}$ مقادیر c و I برای هر دو مقطع یکسان است و داریم: $\frac{\sigma_a}{\sigma_s} = \frac{M_a}{M_s} = \frac{1}{3}$

تمرین: سراسری۸۷

۶۲- تیر شکل روبرو دارای مقطعی ثابت و قرینه نسبت به محورهای افقی و قائم است. تنش خمشی در نقاط C،B و D برابر است. $\frac{a}{L}$ چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۴}$





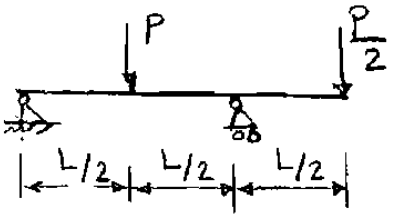
$$M^+ = -\frac{q(a+\frac{L}{۲})^۲}{۲} + \frac{q(L+۲a)}{۲} \times \frac{L}{۲} = q(a+\frac{L}{۲})\left[\frac{-(a+\frac{L}{۲})}{۲} + \frac{L}{۲}\right] =$$

$$= q(a+\frac{L}{۲})(\frac{\frac{L}{۲}-a}{۲}) = \frac{q}{۲}(\frac{L^۲}{۴} - a^۲) \Rightarrow M^- = M^+ \Rightarrow \frac{qa^۲}{۲} = \frac{q}{۲}(\frac{L^۲}{۴} - a^۲)$$

$$\Rightarrow ۸a^۲ = L^۲ \rightarrow \frac{a}{L} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

تمرین: سراسری ۸۳

۴۳- مقطع تیر شکل روبرو مربع مستطیل می باشد. تنش مجاز فشاری چند برابر تنش مجاز کششی باشد تا با افزایش P هر دو تنش با هم به مقدار مجاز برسند؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

ابتدا باید تنش کششی و فشاری را بیابیم؛ دیاگرام لنگر $-\frac{PL}{4}$ و $+\frac{PL}{8}$

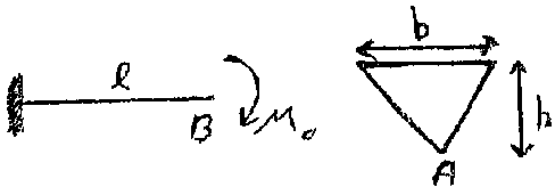
M^- دو برابر M^+ است

در M^+ تنش کششی است $\sigma = \frac{Mc}{I}$

یعنی در این نقطه که M^- ماکزیمم است هم تنش فشاری داریم و هم کششی پس مقادیر مجاز برای هر دو تنش فشاری و کششی باید یکسان باشد

آزاد ۹۰

۵۶- اگر کرنش عمودی ایجاد شده در رأس A از مقطع مثلثی تیر نشان داده شده برابر با ε_0 باشد، آنگاه تغییرمکان نقطه B چه مضربی از $\frac{\varepsilon_0 \ell^2}{h}$ می‌باشد؟



۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

ابتدا رابطه کرنش برابر است با:

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E} = \frac{Mc}{EI} = \frac{M_0\left(\frac{2h}{3}\right)}{EI} \quad (I)$$

و تغییر مکان نقطه B برابر است با:

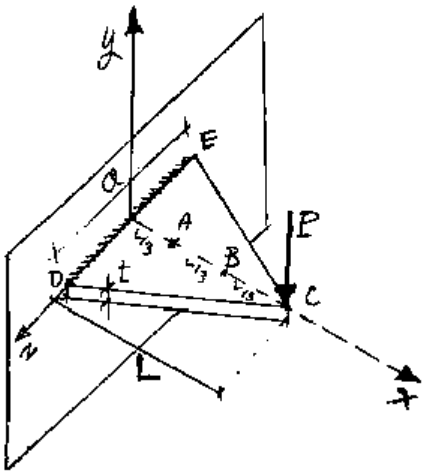
$$\Delta_B = \frac{M_0 \ell^2}{2EI} \quad (II)$$

به جای $\frac{M_0}{EI}$ در رابطه (II)، مقدار آن از رابطه (I) را جایگذاری می‌کنیم

$$\Delta_B = \frac{\left(\frac{3\varepsilon_0}{2h}\right)\ell^2}{2} = \frac{3\varepsilon_0 \ell^2}{4h} \rightarrow \text{گزینه ۲}$$

سراسری ۹۴

۵۱- ورق مثلثی شکل CDE با ضخامت یکسان t، در امتداد DE به طور گیردار به تکیه‌گاه متصل بوده و تحت اثر بار P عمود بر صفحه CDE قرار دارد. کرنش‌های ε_x ایجاد شده در نقاط A و B (مطابق شکل) واقع بر روی صفحه به صورت کدام رابطه بهم مرتبطند؟



۱) $(\varepsilon_x)_A = 2(\varepsilon_x)_B$

۲) $(\varepsilon_x)_A = \sqrt{2}(\varepsilon_x)_B$

۳) $(\varepsilon_x)_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon_x)_B$

۴) $(\varepsilon_x)_A = (\varepsilon_x)_B$

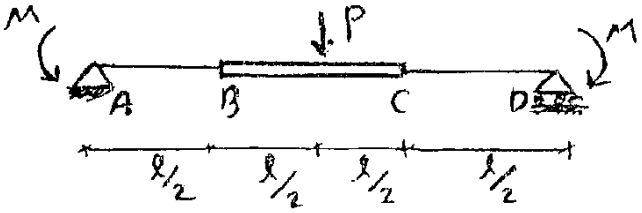
گزینه ۴

با توجه به اینکه مدول الاستیسیته ثابت است، نسبت کرنش ها با نسبت تنشها برابر است:

$$\frac{\varepsilon_A}{\varepsilon_B} = \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{\left(\frac{6M_A}{2b \times h^2}\right)}{\left(\frac{6M_B}{b \times h^2}\right)} = \frac{M_A}{2M_B} = 1$$

آزاد ۹۰

۵۷- ارتفاع تیر با مقطع مستطیلی در قسمت BC، دو برابر سایر قسمت‌ها می‌باشد و پهنای تیر در طول آن ثابت است. مقدار لنگر M چقدر باشد تا حداکثر تنش خمشی در طول تیر حداقل شود؟



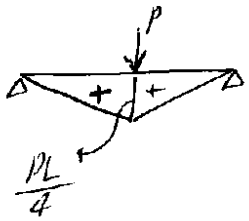
۱) $\frac{P\ell}{20}$

۲) $\frac{P\ell}{5}$

۳) $\frac{P\ell}{10}$

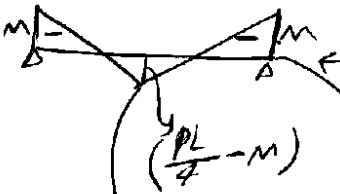
۴) $\frac{P\ell}{4}$

۵۷



اگر M نباشد ←

$\frac{PL}{4}$



با وارد شدن M، دیاگرام برآیند M بالا می رود

$(\frac{PL}{4} - M)$

$\sigma_1 = \frac{6M}{bh^2}$

$\sigma_2 = \frac{6(\frac{PL}{4} - M)}{b(2h)^2}$

} اگر M زیاد باشد $\sigma_1 > \sigma_2$ و اگر M کم باشد $\sigma_2 > \sigma_1$ خواهد بود

حالت بهینه این است که $\sigma_1 = \sigma_2$ باشد

$\sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow 6M = \frac{6}{4}(\frac{PL}{4} - M) \rightarrow M = \frac{PL}{20}$

۱۳-۱-ظرفیت خمشی

سراسری۸۷

۶۳- دو تیر زیر اثر لنگر خمشی مقاومت مساوی دارند. تیر اول دارای مقطع دایره به شعاع **R** و تیر دوم به مقطع مستطیل به پهنای **b** و به ارتفاع **۲b** است. نسبت $\frac{b}{R}$ چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt[3]{3\pi}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3\pi}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt[3]{3\pi}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt[4]{3\pi}}{2}$

مقاومت خمشی = $\frac{\sigma I}{c}$ ⇒ تنش مجاز

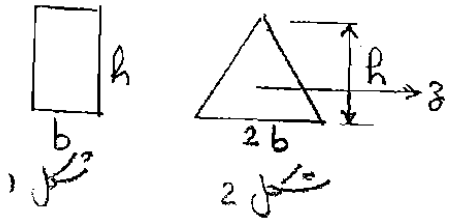
مربع $M = \sigma\left(\frac{(2b)^2 b}{6}\right) = \frac{2\sigma b^3}{3}$

دایره $M = \sigma\left(\frac{\frac{\pi}{4}R^4}{R}\right) = \frac{\pi\sigma R^3}{4}$

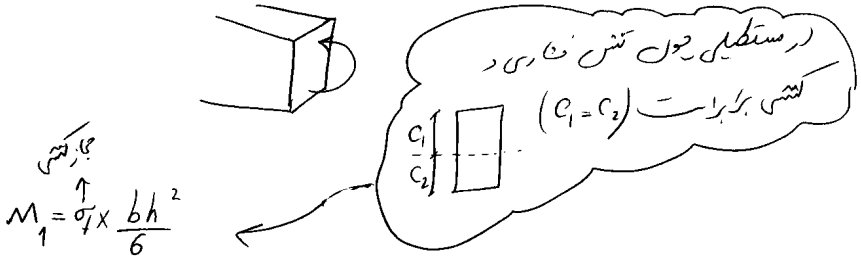
$M_{\text{مربع}} = M_{\text{دایره}} \Rightarrow \frac{2\sigma b^3}{3} = \frac{\pi\sigma R^3}{4} \rightarrow \frac{b}{R} = \frac{\sqrt[3]{3\pi}}{2}$

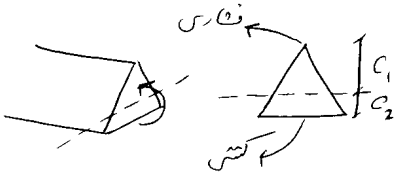
سراسری۸۶

۵۷- دو مقطع شکل روبرو از ماده‌ای هستند که تنش مجاز فشاری آن دو برابر تنش کششی مجاز آن است. نسبت لنگر خمشی مثبت مجاز وارد به دو مقطع $(\frac{M_1}{M_2})$ چقدر است؟ (برای مثلث $I_z = 2bx\frac{h^3}{36}$)



۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) ۲

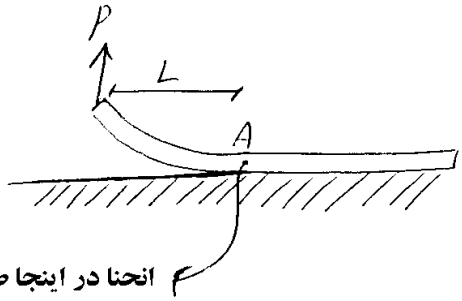




در مقطع تنش فشاری در برابر تنش کششی خواهد بود چون $c_1 = 2c_2$ با این فرق نمی‌کند که فشار را چک کنیم یا کشش را

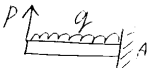
$M_2 = \frac{\sigma_1\left(\frac{2bh^3}{36}\right)}{c_2} = \frac{\sigma_1 \frac{2bh^3}{36}}{(\frac{h}{3})} = \sigma_1 \frac{bh^2}{6} \rightarrow M_1 = M_2$

۱۳-۲-تیر بر روی بستر صلب



انحنا در اینجا صفر است (تیر افقی می شود)

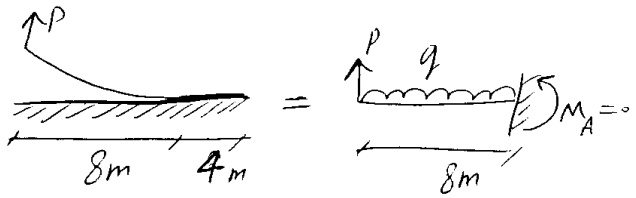
در هر نقطه ای که انحنا صفر شود، لنگر داخلی نیز صفر خواهد بود. بنابراین لنگر داخلی را در نقطه A محاسبه کرده و مساوی صفر قرار می دهیم. از طرفی به علت مماس شدن تیر بر بستر صلب زیرین دوران (θ) نقطه A برابر صفر است.

روش حل: در تیر فوق به صورت  یک تکیه گاه گیردار در نقطه A درنظر گرفته و سپس لنگر در تکیه گاه مجازی را محاسبه و برابر صفر قرار می دهیم.

سراسری۸۸

۶۷- یک شاخه تیرآهن ۱۲ متری با وزن ۲۴۰۰ N روی زمین سفت و صلب قرار دارد. اگر یک انتهای آن به بالا کشیده شود به طوری که ۸ متر از تیر از زمین جدا شود نیروی لازم چند نیوتن می‌باشد؟ $E = 200\ GPa$ و $I = 2000\ cm^4$ می‌باشد.

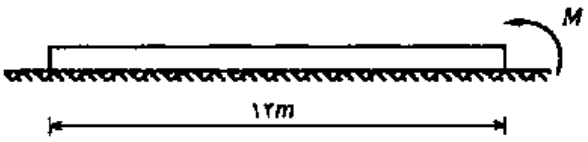
۱) ۸۰۰ ۲) ۶۶۷ ۳) ۶۰۰ ۴) ۱۶۰۰



وزن واحد طول $q = \frac{2400}{12} = 200$ ⇨ $P \times 8 - \frac{q \times 8^2}{2} = 0 \rightarrow P \times 8 = \frac{200 \times 8^2}{2}$ ⇨ $P = 800\ N$

سراسری ۹۴

۵۵- در شکل زیر یک تیر یکنواخت با طول ۱۲ متر و وزن ۱۸۰ کیلوگرم که روی سطحی کاملاً صلب قرار گرفته، نشان داده شده است. مقدار لنگر M (برحسب kg-m) چقدر باشد تا ۴ متر از طول تیر از سطح تکیه‌گاه جدا شود؟



۱) ۳۰۰
۲) ۲۴۰
۳) ۱۸۰
۴) ۱۲۰

وزن واحد طول تیر برابر است با: $q = \frac{180\ kg}{12\ m} = 15\ \frac{kg}{m}$

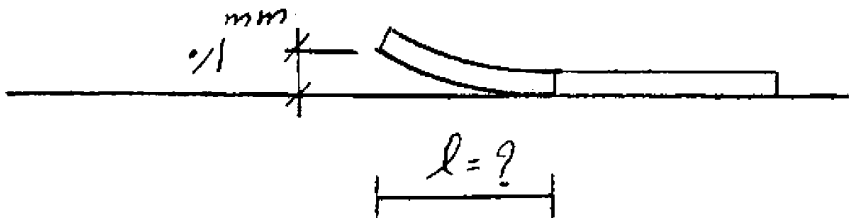
در انتهای ۴ متری از تیر لنگر صفر خواهد بود (چون انحنا صفر می شود):

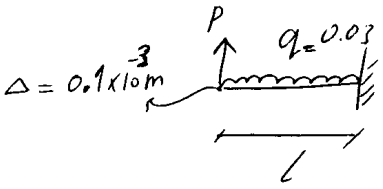
$$M_{4m} = M - \frac{qL^2}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad M - \frac{15 \times 4^2}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad M = 120\ kg.m$$

سراسری ۸۸

۸- تیری که طول آن به حد کافی طولانی است بر روی زمین صلب قرار گرفته است. اگر انتهای آن را به اندازهٔ ۰/۱ میلی‌متر بالا ببریم، طولی که از آن بر حسب متر (m) از زمین جدا می‌شود، چقدر است؟ (وزن تیر ۰/۰۳ تن بر متر و $EI = 200 t.m^2$ می‌باشد.)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۱/۵
۴) ۳





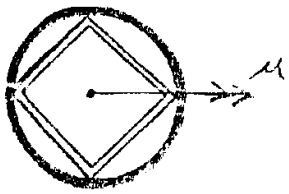
$$M = PL - \frac{0.03L^2}{2} = 0 \rightarrow P = 0.015L$$

$$0.1 \times 10^{-3} = \frac{PL^3}{3 \times 200} - \frac{003 \times L^4}{8 \times 200} \rightarrow 0.1 \times 10^{-3} = \frac{0.015L^4}{3 \times 200} - \frac{003 \times L^4}{8 \times 200} \rightarrow L = 2m$$

۱۳-۳-سهم لنگر

آزاد ۹۰

۵۴- تقریباً چند درصد از لنگر خمشی اعمال شده به مقطع توسط بخش هاشور خورده حلقه‌ای تحمل می‌گردد؟ (شعاع متوسط حلقه برابر با R و ضخامت تمام قسمت‌ها یکسان و برابر t می‌باشد)



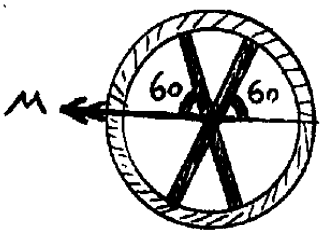
۱) ۲۰ درصد
۲) ۳۰ درصد
۳) ۶۰ درصد
۴) ۴۰ درصد

لنگر به نسبت مان ایرسی تحمل می‌شود

$$\text{سهم لنگر} = \frac{\text{مان ایرسی قسمت هاشورخورده}}{\text{مان ایرسی کل مقطع}} = \frac{\pi R^3 t}{4\left[\frac{4R^3}{3} \times \sqrt{2}\right] + \pi R^3 t}$$

$$= \frac{\pi}{\frac{4}{3} \times \sqrt{2} + \pi} \simeq \frac{3}{1.3 \times 1.4 + 3} \simeq \frac{3}{1.5 + 3} = 60\%$$

آزاد ۹۱



۵۳- چه کسری از لنگر خمشی M توسط قسمت جدار نازک حلقه‌ای شکل تحمل می‌شود؟ (ضخامت و جنس تمام قسمت‌های مقطع یکسان می‌باشد)

۱) $\frac{1}{\pi+2}$ ۲) $\frac{\pi}{\pi+1}$

۳) $\frac{3\pi}{3\pi+1}$ ۴) $\frac{3\pi}{3\pi+2}$

گزینه ۲

لنگر به نسبت ممان اینرسی هر قسمت تحمل می شود و سهم قسمت دایره ای برابر با نسبت ممان اینرسی قسمت دایره ای به ممان اینرسی کل مقطع است. بنابراین باید ممان اینرسی دایره و اعضای مورب را محاسبه کنیم:

$$I_{circle} = \pi R^3 t$$

در محاسبه ممان اینرسی اعضای مایل، ضخامت معادل برابر $\frac{t}{(\sin 60)}$ و ارتفاع معادل برابر $2R \times sin60$ می باشد:

$$I_{line} = 2 \times \frac{t \times (2R)^3 \times (\cos 30)^2}{12} = tR^3$$

هم لنگر دایره برابر خواهد بود با:

$$M_{circle} = \frac{\pi R^3 t}{\pi R^3 t + tR^3} = \frac{\pi}{\pi + 1}$$

آزاد ۸۹

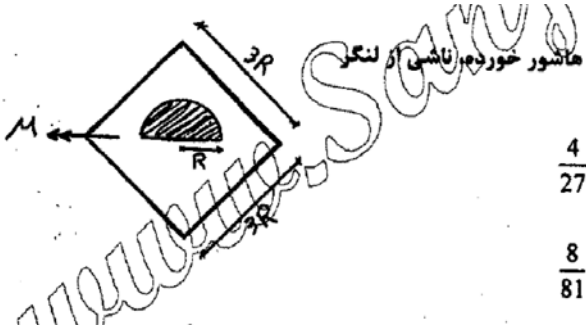
۵۲- یک مقطع لوله‌ای شکل به شعاع متوسط r و ضخامت t تحت اثر لنگر خمشی M قرار دارد. برآیند نیروهای وارد بر مقطع در بالای محور خنثی چقدر است؟

۱) $\frac{M}{\pi r}$ ۲) $\frac{2M}{\pi r}$

۳) $\frac{4M}{3\pi r}$ ۴) $\frac{5M}{3\pi r}$

گزینه ۲

آزاد ۹۱



۵۱- مقدار نیروی اعمال شده به بخش نیم دایره‌ای هاشور خورده ناشی از لنگر خمشی M کدام است؟

۱) $\frac{7}{15}\frac{M}{R}$

۲) $\frac{4}{27}\frac{M}{R}$

۳) $\frac{3}{71}\frac{M}{R}$

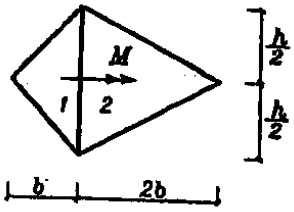
۴) $\frac{8}{81}\frac{M}{R}$

گزینه ۴

مقدار نیروی وارد شده بر قسمتی خاص از یک مقطع تحت اثر خمش از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$F=\frac{MQ}{I}=\frac{M\left(\frac{\pi R^2}{2}\times\frac{4R}{3\pi}\right)}{\frac{(3R)^4}{12}}=\frac{8}{81}\frac{M}{R}$$

آزاد ۸۶



۵۲- در تیر زیر لنگر تحمل شده توسط مقطع اول چند برابر مقطع دوم می باشد؟ $(E_1=3E_2)$

۱) $\frac{3}{4}$

۲) $\frac{3}{2}$

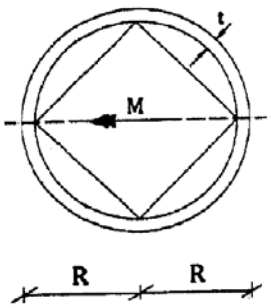
۳) 3

۴) 6

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{EI}{L}\right)_1&=\frac{E_1\frac{bh^3}{48}}{L}=\frac{(3E_2)\frac{bh^3}{48}}{L}\\ \left(\frac{EI}{L}\right)_2&=\frac{E_2\frac{2bh^3}{48}}{L}\end{aligned}\right\}\rightarrow\frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_1}{\left(\frac{EI}{L}\right)_2}=\frac{3}{2}$$

سراسری ۹۳

۵۳- یک مقطع لوزی شکل توسط یک حلقه با اتصال کامل احاطه شده است. اگر به این مقطع لنگر خمشی مثبت وارد شود، چند درصد از لنگر توسط بخش حلقه تحمل می‌شود؟ $(\frac{R}{t}=9$ و $\pi\cong3)$



۱) $\frac{1}{2}$

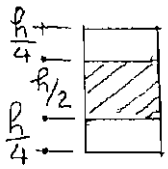
۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) $\frac{3}{4}$

تمرین: سراسری ۸۴

۴۸- مقطع تیری به شکل مستطیل است. اگر زیراثر لنگر خمشی M قرار گیرد چه مقداری از لنگر توسط تنش‌های به وجود آمده در مساحت هاشور خورده ایجاد می‌شود؟



۱) $\frac{M}{2}$

۲) $\frac{M}{4}$

۳) $\frac{M}{8}$

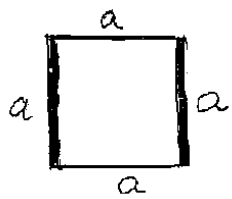
۴) $\frac{M}{16}$

$\frac{I_{\text{هاشور}}}{I_{\text{کل}}} = \frac{\left[\frac{b\left(\frac{h}{2}\right)^3}{12}\right]}{\left[\frac{bh^3}{12}\right]} = \frac{1}{8}$ ← سهم قسمت هاشورخورده از لنگر $= \frac{M}{8}$

تمرین: سراسری ۸۴

۴۹- شکل روبرو مقطع تیری است که جدارهای افقی به ضخامت t_1 و جدارهای قائم به ضخامت t_2 می‌باشند. t_1 و t_2 بسیار کم هستند.

نسبت $\frac{t_2}{t_1}$ چقدر باشد تا نصف لنگر خمشی در جدارهای قائم و نصف آن در جدارهای افقی قرار گیرد؟



۱) ۴

۲) ۳

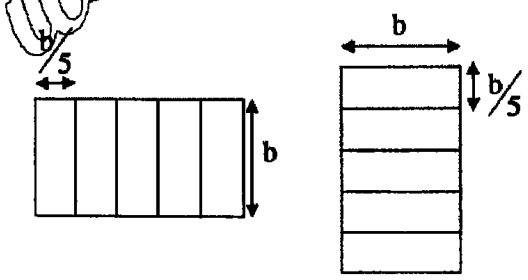
۳) ۲

۴) ۱

I جدارکی قائم $= I$ جدارکی افقی $\Rightarrow 2\left[a t_1 \times \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = 2\times\left[\frac{a^3 t_2}{12}\right] \Rightarrow \frac{a^3 t_1}{2} = \frac{a^3 t_2}{6} \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = 3$

تمرین: آزاد ۹۳

۶۰- اگر 5 تیغه فولادی با سطح مقطع مشخص روبرو، در دو حالت زیر قرار دهیم نسبت مقاومت خمشی در حالتی که عمودی قرار گرفته‌اند (1) به حالت (2) چقدر است؟



۱) 1

۲) 5

۳) 25

۴) $\frac{1}{5}$

۱۳-۴- خمش دو محوره

محور های اصلی ممان اینرسی مقاطع:

اگر $I_{min} = I_{max}$ باشد:

سراسری ۸۲

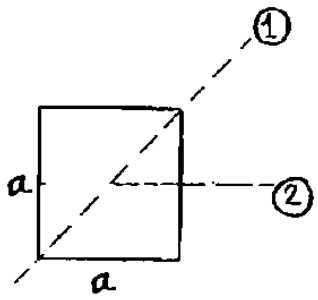
۴۴- مدول مقطع مربع نسبت به یک قطر چند برابر مدول مقطع آن نسبت به محور موازی ضلع آنست؟

۱) ۱

۲) $\sqrt{2}$

۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۴) $\frac{1}{2}$



مدول مقطع یعنی $S = \frac{I}{c}$

حول محور 2-2 $\rightarrow I = \frac{bh^3}{12} = \frac{a^4}{12}$

حول محور 1-1 $\rightarrow I = \frac{a^4}{12}$

نکته: اگر در یک مقطع $I_x = I_y$ بود حول هر محور دیگری که از مرکز سطح مقطع بگذرد مقدار I ثابت است

$$\rightarrow S_{2-2} = \frac{\frac{a^4}{12}}{(\frac{a}{2})} = \frac{a^3}{6}$$

$$S_{1-1} = \frac{\frac{a^4}{12}}{(\frac{a\sqrt{2}}{2})} = \frac{\sqrt{2}\,a^3}{12}$$

$$\rightarrow \frac{S_{1-1}}{S_{2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

سراسری ۸۴

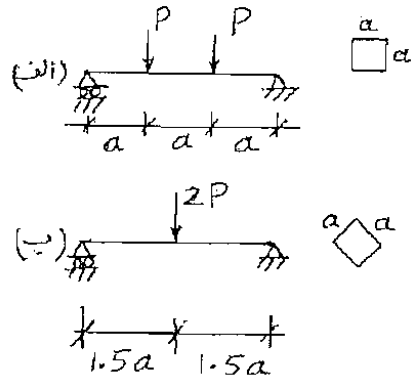
۵۰- تیرهای «الف» و «ب» با مقطع مشخص در شکل مقابل موجود می‌باشند. نسبت تنش ماکزیمم خمشی تیر «ب» به تیر «الف» کدام است؟

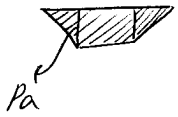
۱) $\sqrt{2}$

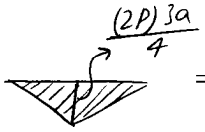
۲) $2\sqrt{2}$

۳) $3\sqrt{2}$

۴) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

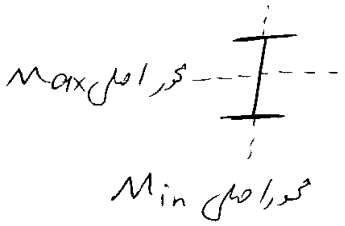


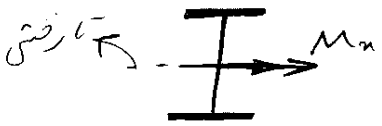
الف) $M =$  $\Rightarrow M_{max} = Pa$ $\quad \sigma_{الف} = \frac{6M}{a^3} = \frac{6Pa}{a^3} = \frac{6P}{a^2}$

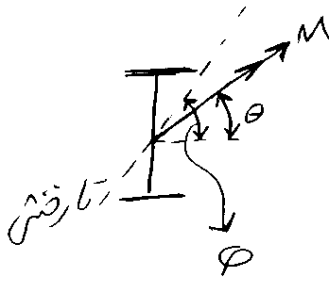
ب) $M =$  $\Rightarrow M_{max} = \frac{3Pa}{2}$ $\quad \sigma_{ب} = \frac{M\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{a^4}{12}} = \frac{6\sqrt{2}M}{a^3} = \frac{9\sqrt{2}P}{a^2}$

$\frac{\sigma_{ب}}{\sigma_{الف}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

اگر لنگر در راستای یکی از محورهای اصلی وارد شود، تارخنثی بر محور خمش منطبق خواهد بود در غیر این صورت محور خنثی از محور خمش کمی منحرف شده و به سمت محور ضعیف تر متمایل می شود:





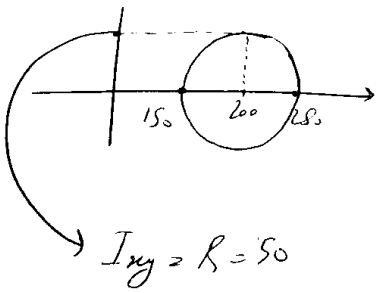


$tg\varphi = \frac{I_n}{I_y} tg\theta$

آزاد ۸۵

۶۷- در یک تیر تحت خمش بال مساوی $I_x = I_y = 200\ Cm^4$ می باشد. اگر ممان اینرسی مقطع نسبت به یکی از محورهای اصلی برابر $150\ Cm^4$ باشد نوع این محور و مقدار I_{xy} کدام اند؟

۱) محور اصلی ضعیف و $75\ Cm^4$
۲) محور اصلی قوی و $50\ Cm^4$
۳) محور اصلی قوی و $75\ Cm^4$
۴) محور اصلی ضعیف و $50\ Cm^4$



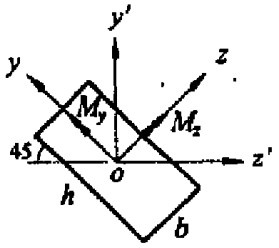
$$\sigma_x = I_x = 200$$
$$\sigma_y = I_y = 200$$
$$\sigma_{main} = I_{main} = 150$$

$$\rightarrow \sigma_x + \sigma_y = \sigma_{min} + \sigma_{max} \quad \rightarrow \quad 200 + 200 = 150 + ? \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{min} = 150 \\ \sigma_{max} = 250 \end{cases}$$

$$\rightarrow \sigma_x \times \sigma_y - \tau_{xy}^2 = \sigma_{min} \times \sigma_{max} \quad \rightarrow \quad 200 \times 200 - \tau_{xy}^2 = 150 \times 250 \quad \rightarrow \quad I_{xy} = \tau_{xy} = \pm 50$$

سراسری ۹۲- دکتری

۱۰- شکل زیر مقطع یک تیر تحت خمش را که به شکل مستطیلی به ابعاد b و h است، نشان می‌دهد. محورهای y و z محورهای اصلی گذرنده از مرکز مقطع هستند. نسبت M_z / M_y چقدر باشد، تا تار خنثی به محور z' منطبق گردد؟



۱) $-(\frac{b}{h})^2$
۲) $(\frac{b}{h})^2$
۳) $-(\frac{h}{b})^2$
۴) $(\frac{h}{b})^2$

سراسری ۹۱- دکتری

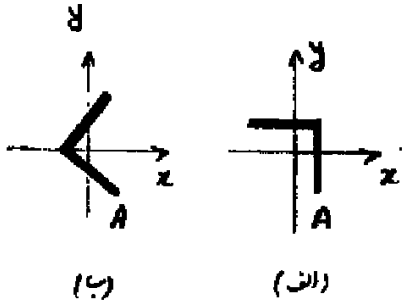
۱۰- شکل مقابل سطح مقطع دو تیر تحت خمش را که در راستای محور y بارگذاری شده‌اند نشان می‌دهد. در کدام حالت استفاده از رابطه $\sigma = \frac{My}{I_x}$ برای محاسبه تنش خمشی در نقطه A مجاز است؟

۱) حالت « الف»

۲) حالت « ب»

۳) هر دو حالت « الف» و « ب»

۴) هیچ یک از دو حالت



(ب) (الف)

سراسری۸۷

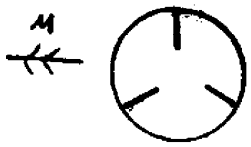
۶۴- مقطع تیری شامل لوله‌ای با شعاع a و ضخامت t همراه سه تقویت کننده به صورت ورق با عرض $\frac{a}{2}$ و ضخامت t می‌باشد به طوری‌که ورق‌ها در داخل لوله به جداره آن به طور عمود بر جداره اتصال یافته و امتداد آن‌ها با یکدیگر زاویه ۱۲۰ درجه می‌سازند. تنش حداکثر در تیر بر اثر لنگر خمشی M را بدست آورید.

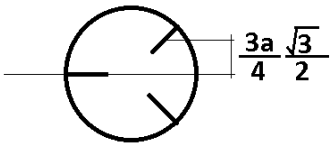
۱) $\frac{0/2M}{ta^2}$

۲) $\frac{0/25M}{ta^2}$

۳) $\frac{0/3M}{ta^2}$

۴) $\frac{M}{\pi ta^2}$





$$I = \pi R^3 t + 2\left(\frac{t\left(\frac{a}{2}\right)^3}{12}\text{Cos}^2 30 + \left(\frac{at}{2}\right)\times\left(\frac{3a}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = \pi t a^3 + 2\left(\frac{ta^3}{128} + \frac{27ta^3}{128}\right) = \pi t a^3 + \frac{7}{16}ta^3$$
$$= 3.57ta^3$$

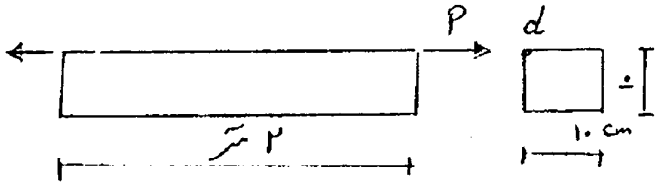
$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{Ma}{3.57ta^3} = \frac{0.28M}{ta^2}$$

پاسخ در گزینه ها نیست.

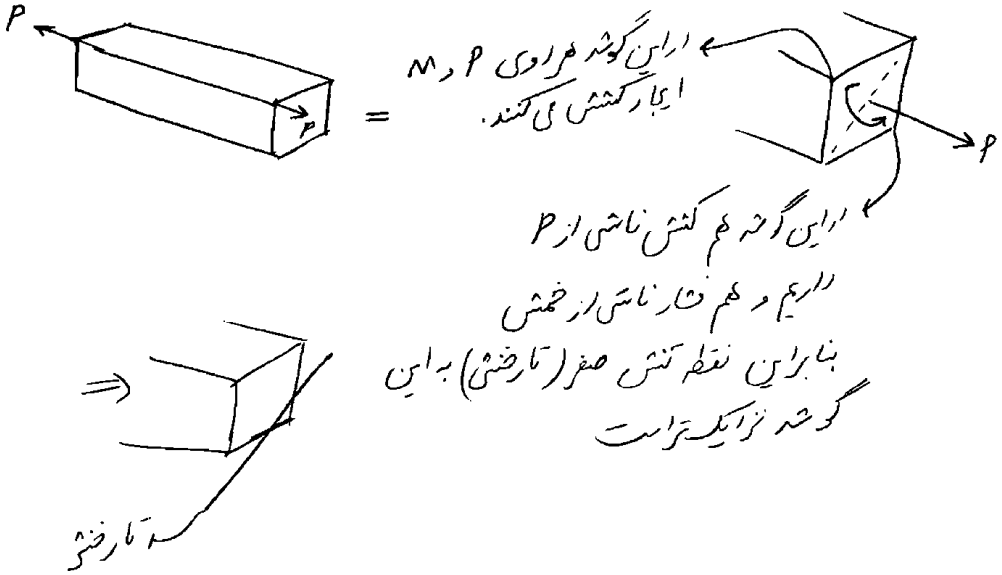
۱۳-۵-ترکیب خمش با نیروی محوری

سراسری ۹۰

۴۷- تیری مطابق شکل تحت اثر بار کششی P در گوشه بالای سمت چپ (نقطه d) قرار دارد. محور خنثی مقطع کدام گزینه می‌باشد؟

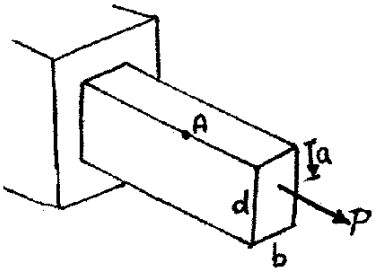


گزینه ۱ ۹۷



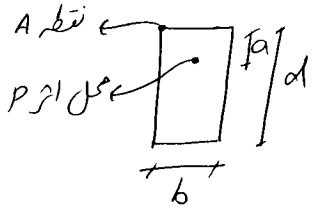
سراسری ۸۹

۴۶- نیروی متمرکز P در عمق a از مقطع تیر نشان داده شده اثر می‌کند. ارتفاع مقطع را به گونه‌ای تعیین کنید که تنش در نقطه A حداکثر باشد؟



۱) b
۲) ۲a
۳) $\frac{bd}{2a}$
۴) ۳a

$$\sigma_A = \frac{P}{bd} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{bd} + \frac{[P_x(\frac{d}{2}-a)]\,d/2}{\frac{bd^3}{12}}$$

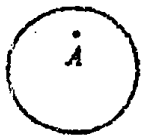


$$= \left(\frac{P}{bd} + \frac{3P}{bd} - \frac{6Pa}{bd^2}\right) \rightarrow \text{این مقدار باید ماکزیمم شود} \rightarrow \left(\frac{P}{b}\right)\left(\frac{4}{d} - \frac{6a}{d^2}\right)$$

مشتق می‌گیریم $\Rightarrow \frac{-4}{d^2} + \frac{12a}{d^3} = 0 \rightarrow \boxed{d = 3a}$

آزاد ۸۹

۵۵- در مقطع دایروی زیر نیروی محوری کششی P در نقطه A به فاصله e از بالای مقطع روی قطر قائم مقطع اعمال شده است. قطر مقطع چقدر باشد تا تنش فشاری در پایین مقطع ماکزیمم شود؟



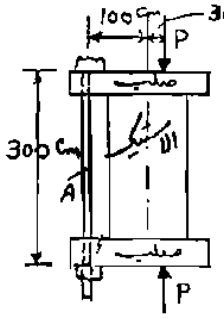
۱) 2.4e ۲) 4.2e

۳) 3e ۴) 4e

گزینه ۴

سراسری ۸۱

۳۳- در دوطرف یک مکعب مستطیل الاستیک دو جسم صلب قرار گرفته و بار P = ۲۰t به اجسام صلب وارد می‌شود. پیچ A بطول سه متر و به گام یک میلیمتر (فاصله دندانه‌ها) مطابق شکل دو جسم صلب را بهم وصل می‌کند . از حالت تماس بدون تنش ، مهره را چند دور باید پیچاند تا تنش وارد به جسم الاستیک یکنواخت باشد؟ ($E = ۲\times۱۰^{۶}\frac{kg}{cm^{۲}}$ و $A = ۵\ cm^{۲}$ سطح مقطع پیچ)



۱) ۱/۲

۲) ۱/۸

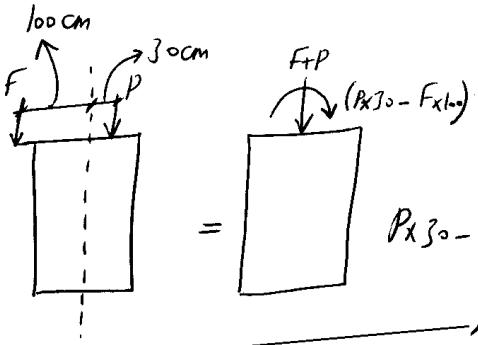
۳) ۶

۴) با دوران مهره نمی‌توان تنش در مکعب مستطیل را یکنواخت کرد.

در این سوال چون مشخصات قسمت الاستیک داده نشده است (A, E, σ) فرض بر این است که تغییر طول آن در مقایسه با تغییر طول میله A ناچیز است

روش حل: ابتدا از تعادل مقدار F را می‌یابیم

از آنجا که مقدار لنگر باید صفر باشد (مشابه گفته ۳)



$Px30 - Fx100 = 0 \longrightarrow F = 0.3P = 6\ ton$

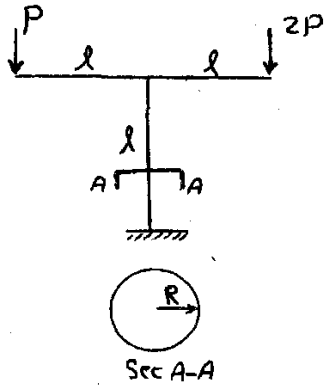
بنابراین برای صفر شدن لنگر باید میله A به اندازه F = 6 ton تحت کشش قرار گیرد

$\Delta_{A\ میله} = \frac{FL}{EA} = \frac{(6000)\times 300}{2\times10^{6}\times 5} = 0.18\ cm = 1.8\ mm$

چون فاصله دندانه‌ها (گام پیچ) 1mm است

پس باید 1.8 دور بچرخانیم

آزاد ۹۲



۵۴- حداکثر تنش عمودی ایجاد شده در تکیه‌گاه گیردار ستون با مقطع دایره‌ای نشان داده شده کدام است؟ $(\ell = 5R)$

۱) $15\frac{P}{\pi R^2}$ ۲) $20\frac{P}{\pi R^2}$

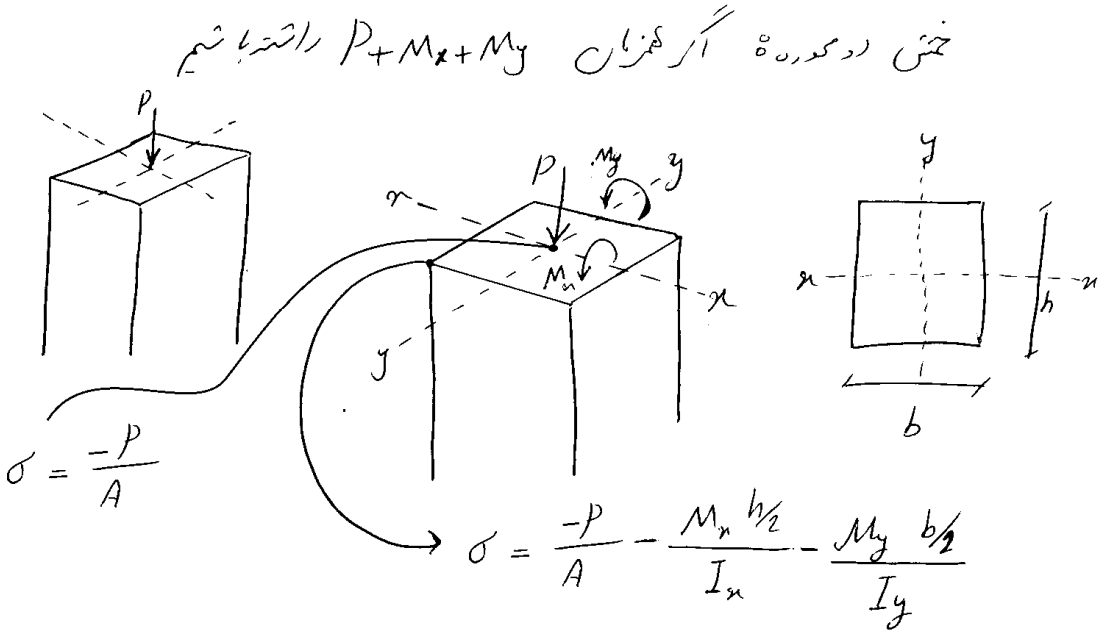
۳) $23\frac{P}{\pi R^2}$ ۴) $36\frac{P}{\pi R^2}$

گزینه ۳

ستون تحت اثر فشار و خمش قرار دارد:

$$\left.\begin{matrix} N = 3P \\ M = PL \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad \sigma = \frac{N}{A} + \frac{MR}{I} = \frac{3P}{\pi R^2} + \frac{PLR}{\frac{\pi R^4}{4}} = \frac{3P}{\pi R^2} + \frac{20P}{\pi R^2} = \frac{23P}{\pi R^2}$$

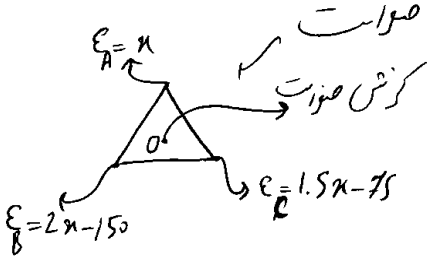
۱۳-۶-خمش دو محوره همراه با نیروی محوری



آزاد ۸۵

۷۶- در یک مقطع مثلثی کرنشهای قائم در گوشه های A و B و C به ترتیب برابر x و 2x-150 و 1.5x-75 بر حسب میکرو استرین می باشد. X چقدر باشد تا مقطع تحت اثر خمش قرار داشته باشد؟

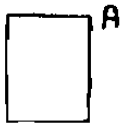
۱) $x = 150$ ۲) $x = 50$ ۳) $x \neq 50$ ۴) $x \neq 150$



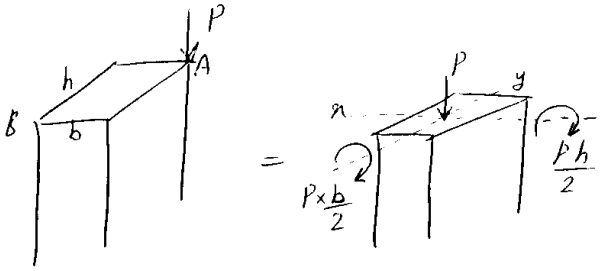
$$\Longrightarrow \varepsilon_O = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C}{3} = \frac{4.5x - 225}{3} = 0 \longrightarrow x = \frac{225}{4.5} = 50$$

تمرین: سراسری ۸۳

۴۱- مقطع یک عضو سازه ای مربع مستطیل مطابق شکل روبرو می باشد. برآیند تنش ها در مقطع یک نیروی عمودی فشاری در A می باشد. قدر مطلق تنش فشاری چند برابر تنش کششی است؟



۱) $\frac{۱۳}{۱۱}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱/۴



ماکزیمم تنش فشاری در نقطه A و تنش کششی در نقطه B اتفاق می افتد:

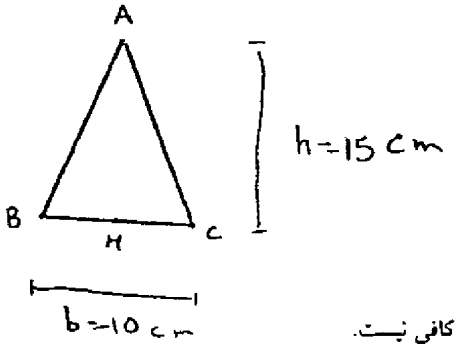
$$\sigma_A = \frac{-P}{bh} - \frac{M_x}{\frac{bh^2}{6}} - \frac{M_y}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{-P}{bh} - \frac{P\times h/2}{\frac{bh^2}{6}} - \frac{P\times b/2}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{-P}{bh}(1+3+3) = \frac{-7P}{bh}$$

$$\sigma_B = \frac{-P}{bh} + \frac{M_x}{\frac{bh^2}{6}} + \frac{M_y}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{-P}{bh}(1-3-3) = \frac{+5P}{bh} \longrightarrow \left|\frac{\sigma_A}{\sigma_B}\right| = \frac{7}{5} = 1.4$$

آزاد ۸۵

۶۶- در مقطع مثلثی زیر که تحت اثر بار برون محور P قرار دارد کرنشهای قائم در نقاط A و H (وسط BC) به ترتیب برابر $200\ \mu m/m$ و $500\ \mu m/m$ می‌باشد. مقدار بار P چقدر است؟

$(E = 2\times 10^6\ kg/cm^2)$



۱) 45 t

۲) 52.5 t

۳) 60 t

۴) برای تحلیل مقطع نیاز به دانستن کرنش در سه نقطه از مقطع می باشد و اطلاعات مسئله کافی نیست.

کرنش ناشی از خمش در مرکز سطح صفر است (تار خنثی از مرکز می گذرد). بنابراین مقدار کرنش در وسط تنها ناشی از نیروی محوری خواهد بود:

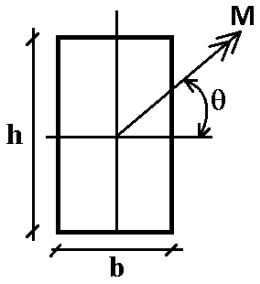
$$\varepsilon_{center} = \varepsilon_H + \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_H}{3} = 200 + \frac{300}{3} = 300\mu m$$

$$\sigma_{center} = E\varepsilon_{center} = 2\times 10^6 \times (300\times 10^{-6}) = 600\ \frac{kg}{cm^2}$$

$$P = \sigma_{center} \times A = 600 \times \left(\frac{15\times 10}{2}\right) = 45000\ kg = 45\ ton$$

سراسری ۷۸:

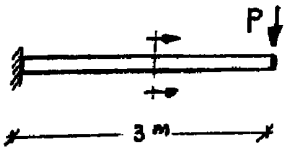
در یک مقطع لنگر M در چه راستایی وارد شود تا تنش خمشی ماکزیمم شود؟

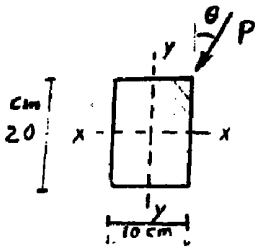


سراسری ۹۰

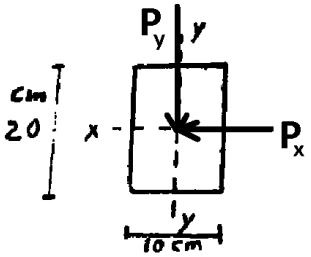
۵۳- تیر طره‌ای مطابق شکل تحت اثر نیروی متمرکز P تحت زاویه θ مطابق شکل قرار دارد. زاویه θ بین صفر تا ۹۰° تغییر می‌کند. چنانچه تنش مجاز فشاری و کششی مصالح تیر برابر $۲۰۰\frac{kg}{cm^۲}$ باشد، حداکثر مقدار مجاز P چند kg است؟

۱) ۹۹
۲) ۲۹۸
۳) ۱۹۹
۴) ۳۹۸





بدترین حالت بارگذاری: M=300P در راستای قطر وارد شود:



$$\left.\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{\sqrt{5}}M \\ M_y &= \frac{2}{\sqrt{5}}M \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} M_x &= \frac{300P}{\sqrt{5}} \\ M_y &= \frac{600P}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{M_x \times 10}{\frac{10 \times 20^3}{12}} + \frac{M_y \times 5}{\frac{20 \times 10^3}{12}} = \frac{3M_x}{2000} + \frac{3M_y}{1000} = \frac{9P}{20\sqrt{5}} + \frac{18P}{10\sqrt{5}} = P\left(\frac{45}{20\sqrt{5}}\right)$$

$$P\left(\frac{45}{20\sqrt{5}}\right) \leq 200 \rightarrow P \leq 198.76$$

سراسری ۹۲

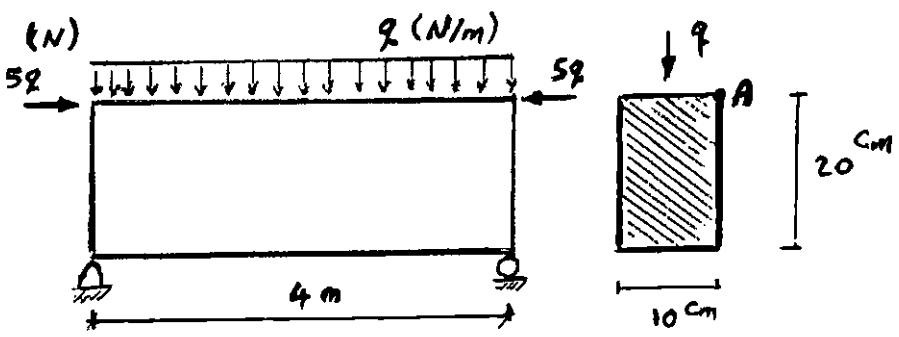
۴۹- تیر دو سر سادهٔ زیر، تحت بار گستردهٔ q در طول عضو و دو بار متمرکز 5q که در نقطهٔ A از مقطع تیر وارد می‌شود، قرارگرفته است. چنانچه تنش مجاز فشاری و کششی مصالح تیر برابر $۲۵۰\frac{N}{mm^۲}$ باشد، حداکثر مقدار مجاز q چند نیوتن بر متر است؟

۱) ۶۶۵۵

۲) ۱۵۵۵

۳) ۱۶۵۵

۴) ۶۵۵



تیر تحت اثر ترکیبی از لنگر و نیروی محوری قرار دارد:

$$\left.\begin{array}{c} P = 5q\ N \\ M_x = \frac{qL^2}{8} + 5q \times \frac{h}{2} = \frac{q \times 4^2}{8} + 5q \times 0.1 = 2.5q\ N.m \\ M_y = 5q \times \frac{b}{2} = 5q \times 0.05 = .25q\ N.m \end{array}\right\} \rightarrow \sigma = \frac{P}{A} + \frac{6M_x}{bh^2} + \frac{6M_y}{b^2h}$$

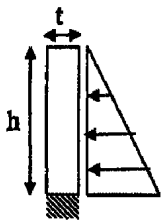
$$\sigma = \frac{5q}{0.1 \times 0.2} + 6\frac{2.5}{0.1 \times 0.2^2} + 6\frac{0.25}{0.1^2 \times 0.2} = 250q + 3750q + 750q = 4750q\ \frac{N}{m^2}$$
$$= 4.750q \times 10^{-3}\ \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma < 250 \rightarrow 4.750q \times 10^{-3} < 250 \rightarrow q < 52.632\frac{N}{mm} \rightarrow q < 52632\frac{N}{m}$$

پاسخ در گزینه ها نیست.

تمرین: آزاد ۹۳

۴۹ـ دیوار بتنی به عرض ثابت، تحت فشار هیدرواستاتیک قرار داد. حداقل ضخامتی که دیوار بتنی داشته باشد تا تنش کششی در هیچ نقطه پایه دیوار تشکیل نشود چقدر است؟ وزن مخصوص γ_w و بتن γ_c



۱) $t = h\frac{\sqrt{3\gamma_w}}{\gamma_c}$

۲) $t = h\frac{\sqrt[3]{3\gamma_w}}{\gamma_c}$

۳) $t = h\frac{\sqrt{\gamma_w}}{\gamma_c}$

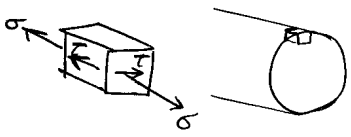
۴) $t = h\frac{\sqrt[3]{\gamma_c}}{\gamma_w}$

۱۳-۷-ترکیب خمش و پیچش

سراسری۸۵

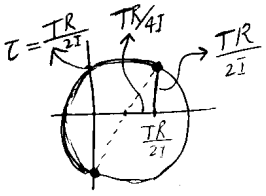
۵۱- به میله‌ای به مقطع دایره لنگر پیچشی T و لنگر خمشی M وارد می‌شود بطوریکه $M=\frac{T}{۲}$. اگرلنگر پیچشی نصف شود و لنگر خمشی دو برابر گردد τ_{max} در میله چه تغییری می‌کند؟

۱) تغییری نمی‌کند. ۲) $\sqrt{۵}$ برابر می‌شود. ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}$ برابر می‌شود. ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ برابر می‌شود.



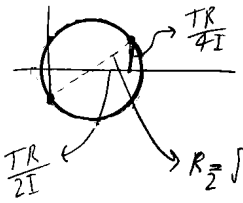
$$\begin{cases}\tau=\dfrac{TR}{J}=\dfrac{TR}{2I}\\ \sigma=\dfrac{(M=\frac{T}{2})R}{I}=\dfrac{TR}{2I}\end{cases}$$

حالت اول:



$$\tau_{max}=R_1=\sqrt{\left(\frac{TR}{2I}\right)^2+\left(\frac{TR}{4I}\right)^2}$$

حالت دوم:



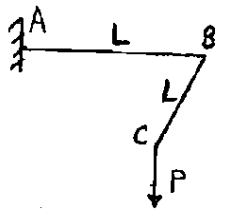
$$R_2=\sqrt{\left(\frac{TR}{4I}\right)^2+\left(\frac{TR}{2I}\right)^2}$$

$$\begin{cases}\tau=\dfrac{(T/2)R}{J}=\dfrac{TR}{4I}\\ \sigma=\dfrac{(2M=T)R}{I}=\dfrac{TR}{I}\end{cases}$$

بنابراین τ_{max} تغیر نمی‌کند

سراسری ۸۵

۴۴- در شکل روبرو ABC در صفحهٔ افق است و P قائم می‌باشد. AB و BC میله‌هایی یکسان به مقطع دایره می‌باشند. اگر $\delta_B = \frac{pL^3}{3EI}$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2/6}$ باشد. تغییر مکان نقطه C برابر است با:

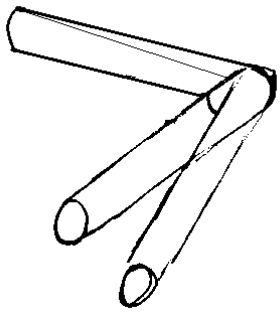


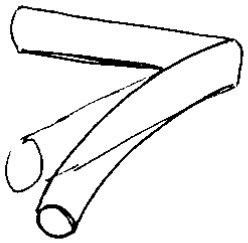
۱) $\frac{PL^3}{EI}$

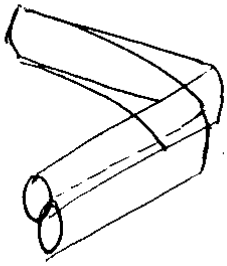
۲) $\frac{2PL^3}{3EI}$

۳) $\frac{9/8PL^3}{3EI}$

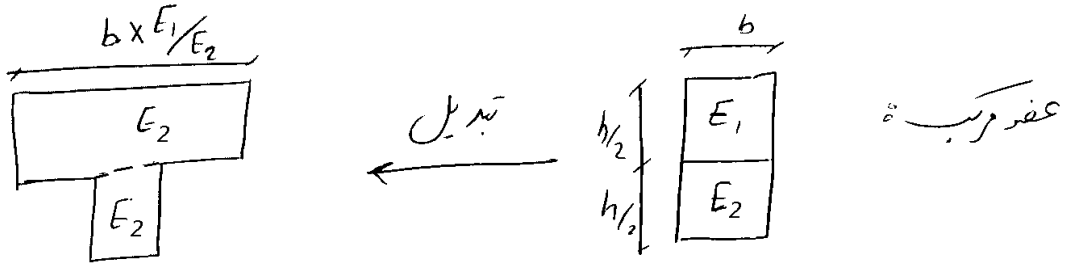
۴) $\frac{5/9pL^3}{3EI}$



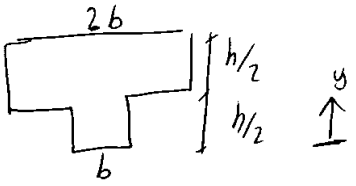




۱۳-۸-مقاطع مرکب



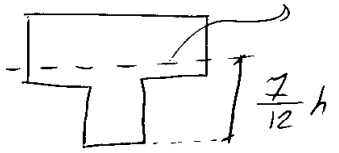
پس از تبدیل تارخنثی را پیدا میکنیم مثلاً اگر $E_1 = 2E_2$ باشد خواهیم داشت



$$\bar{y} = \frac{(2b \times h/2) \times \frac{3h}{4} + (b \times h/2) \times h/4}{2b \times \frac{h}{2} + b \times \frac{h}{2}}$$

$$= \frac{7}{12}h$$

تارخنثی



سؤال: تنش در اثر M را در بالا و پایین حساب کنید؟

پس از محاسبه تنش در مقطع تبدیل یافته باید آن را به نسبت تبدیل شده ضرب کرد.

$$\sigma_{top} = \left[\frac{M \times \frac{5}{12}h}{I}\right] \times 2 \times \left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$

$$\sigma_{bot} = \left[\frac{M \times \frac{7}{12}h}{I}\right] \times 1$$

سراسری ۹۱- دکتری

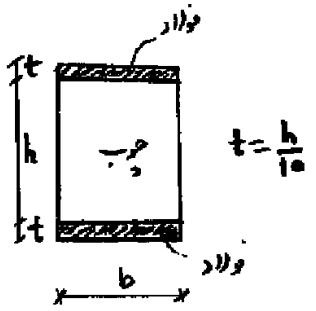
۸- تیری از جنس چوب با مقطع مستطیلی شکل با دو ورق فولادی در بالا و پایین مطابق شکل تقویت شده است. چنانچه نسبت مدول ارتجاعی فولاد به چوب $\frac{E_s}{E_w} = ۲۰$ باشد، نسبت حداکثر تنش خمشی ایجاد شده در فولاد به حداکثر تنش خمشی ایجاد شده در چوب چقدر است؟

۱) ۲۰

۲) ۲۲

۳) ۲۴

۴) ۲۶



آزاد ۹۲

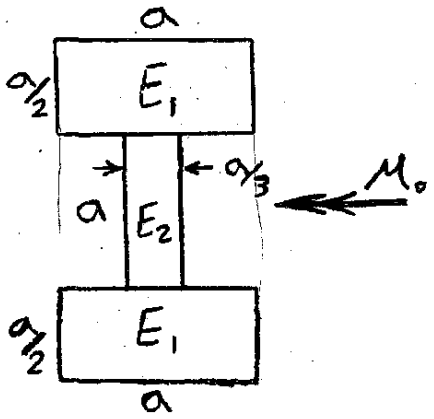
۵۶- حداکثر تنش خمشی ناشی از لنگر M_0 اعمال شده به مقطع غیرهمگن مقابل کدام است؟ $(E_2 = 3E_1)$

۱) $\frac{3}{2}\frac{M_0}{a^3}$

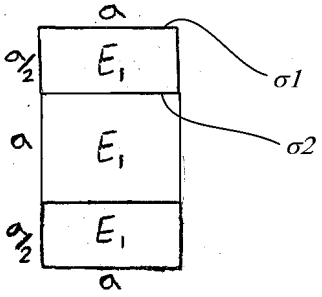
۲) $\frac{4}{9}\frac{M_0}{a^3}$

۳) $\frac{2}{3}\frac{M_0}{a^3}$

۴) $\frac{9}{4}\frac{M_0}{a^3}$



گزینه ۴. مقطع تبدیل یافته به صورت زیر خواهد بود و تنشها برابرند با:



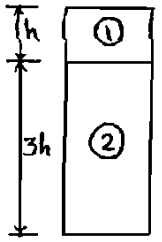
$$\sigma_1 = \frac{M_0 a}{\frac{a\times(2a)^3}{12}} = \frac{3}{2}\frac{M_0}{a^3}$$

$$\sigma_2 = 3 \times \frac{M_0\left(\frac{a}{2}\right)}{\frac{a\times(2a)^3}{12}} = \frac{9}{4}\frac{M_0}{a^3}$$

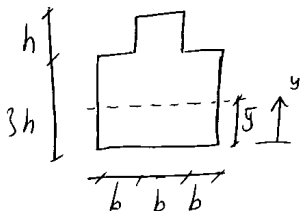
بنابراین تنش ماکزیمم برابر $\frac{9}{4}\frac{M_0}{a^3}$ می باشد.

سراسری ۸۳

۵۹- تیر مرکبی با مقطع نشان داده شده تحت اثر ممان خمشی منفی قرار گرفته است. هر گاه $E_2 = 2E_1$ باشد نسبت بیشترین تنش کششی به بیشترین تنش فشاری چقدر است؟



۱) ۰/۷۶
۲) ۰/۶۵
۳) ۰/۴۵
۴) ۱/۳۵



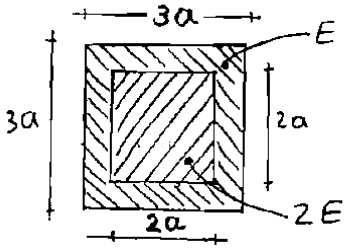
$$\bar{y} = \frac{\overbrace{hb}^{A_1} \times 3.5h + \overbrace{(3h)(3b)}^{A_2} \times 1.5h}{\underbrace{hb}_{A_1} + \underbrace{(3h)(3b)}_{A_2}} = \frac{17}{10}h$$

چون نسبت تنش ها را خواسته نیازی به محاسبه I نیست چون I حذف می‌شود

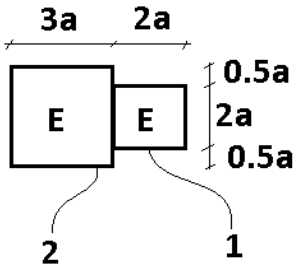
$$\sigma_{top} = \frac{M \times (4h - \frac{17h}{10})}{I} \quad \text{کششی} \qquad \sigma_{bot} = 3\left[\frac{M \times \frac{17h}{10}}{I}\right] \quad \text{فشاری} \Rightarrow \frac{\text{کششی}}{\text{فشاری}} = \frac{4h - 17h/10}{3 \times 17h/10} = 0.451$$

سراسری ۸۱

۳۸- در تیر مرکب شکل زیر چنانچه حداکثر تنش مجاز برای هر دو نوع مصالح مساوی σ_a باشد، حداکثر لنگر خمشی مجاز چقدر است؟



۱) $\frac{8}{97} a^3 \sigma_a$
۲) $\frac{6}{97} a^3 \sigma_a$
۳) $\frac{8}{81} a^3 \sigma_a$
۴) $\frac{6}{81} a^3 \sigma_a$



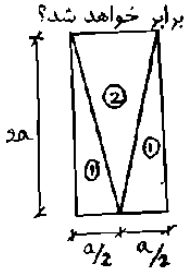
$$I = \frac{(3a)^4}{12} + \frac{(2a)^4}{12} = \frac{97}{12}a^4$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= 2\left(\frac{M \times a}{I}\right) = \frac{24M}{97a^3} \\ \sigma_2 &= \frac{M \times 1.5a}{I} = \frac{18Ma}{97a^3} \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{تنش در } 1 \text{ بیشتر از } 2 \text{ است} \rightarrow M = \frac{97a^3\sigma_1}{24}$$

پاسخ در گزینه ها نیست.

سراسری ۸۲

۴۲- در یک تیر با مقطع مقابل، اگر مدول الاستیسته ناحیه ۲ مقطع را دو برابر کنیم، تغییر شکل حداکثر چند برابر خواهد شد؟



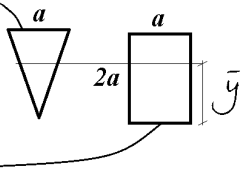
۱) ۰٫۶۶۷
۲) ۰٫۶۹۲
۳) ۰٫۷۴۵
۴) ۰٫۵

با توجه به روابطی مانند $\Delta=\frac{PL^3}{3EI}$، خیز با EI رابطه عکس دارد. بنابراین باید ممان اینرسی معادل مقطع را در دوحالت محاسبه کرده و مقایسه کنید:

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1}=\frac{I\left(\square\right)}{I\left(\square+\triangledown\right)}$$

برای محاسبه I2 ابتدا باید مرکز سطح مقطع معادل را محاسبه کنیم:

$$\bar{y}=\frac{\left(\frac{a\times 2a}{2}\right)\times\frac{2(2a)}{3}+(a\times 2a)\times a}{\left(\frac{a\times 2a}{2}\right)+(a\times 2a)}=\frac{10a}{9}$$



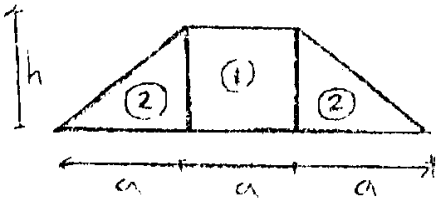
$$I_2=\underbrace{\left[\frac{a\times(2a)^3}{12}+(a\times 2a)\times\left(\frac{a}{3}\right)^2\right]}_{\text{مستطیل}}+\underbrace{\left[\frac{a\times(2a)^3}{36}+\left(\frac{a\times 2a}{2}\right)\times\left(\frac{2(2a)}{3}-\frac{10a}{9}\right)^2\right]}_{\text{مثلث}}=\frac{26}{27}a^4$$

$$I_1=\frac{a(2a)^3}{12}=\frac{2a^4}{3}$$

$$\left.\frac{\Delta_2}{\Delta_1}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{26}{27}\right)}=\frac{9}{13}=0.692\right\}$$

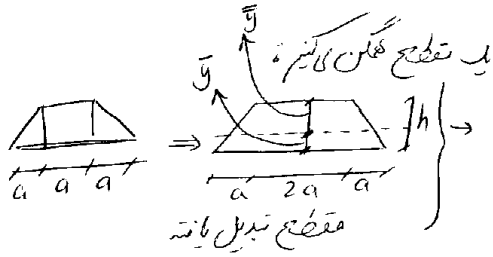
آزاد ۹۰

۵۵- نسبت بیشترین کرنش کششی به بیشترین کرنش فشاری در مقطع غیرهمگن نشان داده شده که تحت اثر لنگر خمشی منفی قرار دارد کدام است؟ $(E_1=2E_2)$



۱) $\frac{5}{4}$
۲) 1
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{3}$

ابتدا مقطع را تبدیل به یک مقطع همگن می‌کنیم:



مقطع تبدیل یافته

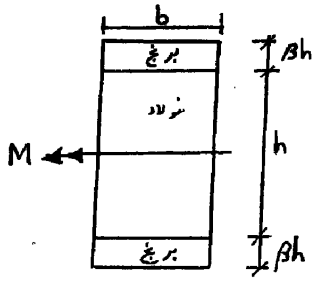
$$\bar{y}=\frac{(2ah)\times\frac{h}{2}+\left(\frac{ah}{2}\right)\times 2\times\frac{h}{3}}{2ah+\left(\frac{ah}{2}\right)\times 2}=\frac{h+\frac{h}{3}}{2+1}=\frac{4h}{9}\Rightarrow\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_c}=\frac{\bar{\bar{y}}}{\bar{y}}=\frac{5}{4}$$

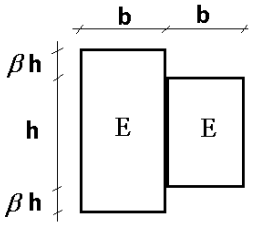
$$\bar{\bar{y}}=h-\bar{y}=\frac{5h}{9}$$

تمرین: سراسری ۹۰

۴۹- مقطع تیر مرکبی که از برنج و فولاد تشکیل شده است تحت لنگر خمشی M قرار می‌گیرد. مقدار β چقدر باشد تا حداکثر تنش نرمال در فولاد با حداکثر تنش نرمال در برنج یکسان شود؟ ($E_s / E_b = 2$ ، E_s = مدول الاستیسیته فولاد، E_b = مدول الاستیسیته برنج)

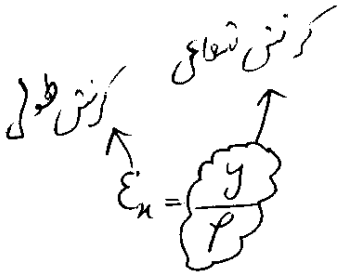
۱) ۰/۱
۲) ۰/۴
۳) ۰/۳
۴) ۰/۵

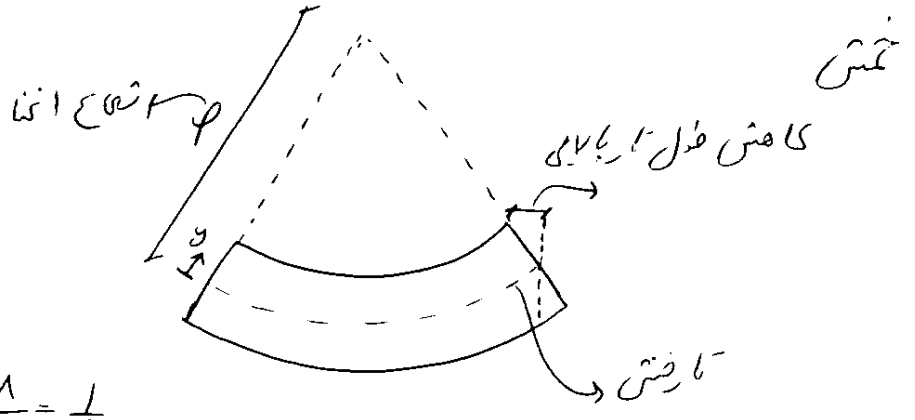




$$\left.\begin{aligned}\sigma_{\text{فولاد}} &= 2\left(\frac{M\frac{h}{2}}{I}\right)\\ \sigma_{\text{برنج}} &= \frac{M\times\left(\frac{h}{2}+\beta h\right)}{I}\end{aligned}\right\} 2\left(\frac{M\frac{h}{2}}{I}\right) = \frac{M\times\left(\frac{h}{2}+\beta h\right)}{I} \rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

۱۳-۹-شعاع انحنا





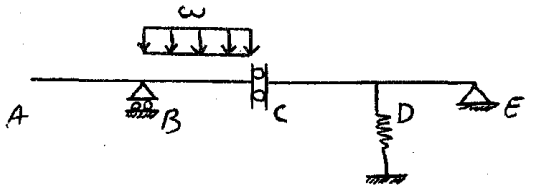
$$\rightarrow \begin{cases}\sigma_x = \frac{y}{\rho}E\\ \sigma_x = \frac{My}{I}\end{cases} \rightarrow \frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}$$

ρ : شعاع انحنا ← هرچه کمتر شود به معنی افزایش لنگر M است
$\frac{1}{\rho}$: انحنا

نکته: در هر قسمتی از تیر که مقدار لنگر ثابت است ρ ثابت خواهد بود و تغییر شکل تیر به صورت کمانی از دایره خواهد بود

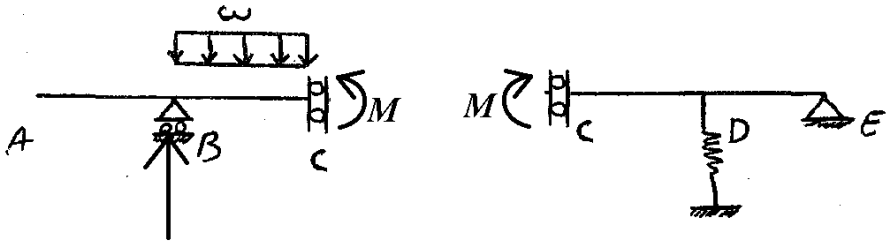
آزاد ۹۲

۵۷- در کدام قسمت از تیر نشان داده شده نمودار تغییرشکل سازه به صورت کمانی از دایره می‌باشد؟ (صلبیت خمشی اعضاء EI می‌باشد)



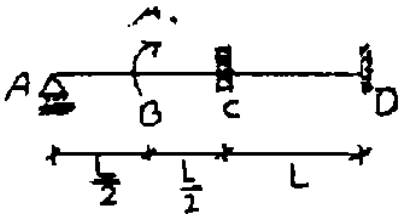
۱) AB ۲) BC
۳) CD ۴) DE

گزینه ۳: تغییر شکل سازه تنها در نقاطی که مقدار لنگر در طول تیر ثابت باشد، به صورت کمانی از دایره خواهد بود. دیاگرام لنگر در نقاطی ثابت است که برش در آن عضو صفر باشد. با توجه به شکل زیر تنها در عضو CM خمش ثابت (و برش صفر) داریم.



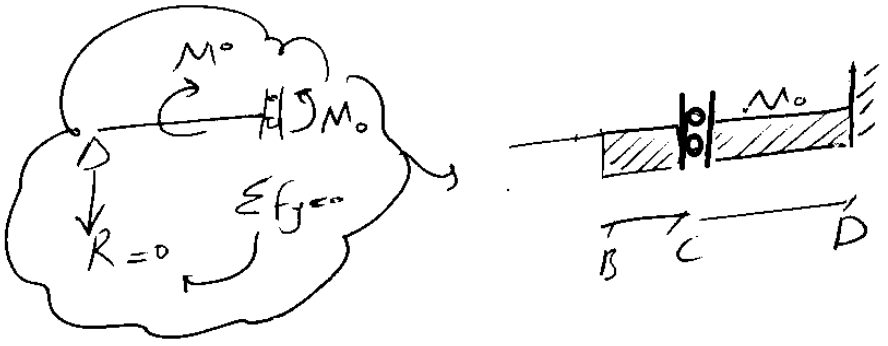
آزاد ۸۷

منحنی تغییرشکل نشان داده شده در کدام قسمت به صورت کمانی از دایره است؟



۱) فقط AB ۲) فقط CD
۳) BC و AB ۴) CD و BC

گزینه ۴: هرجا که لنگر ثابت باشد، شعاع انحنا نیز ثابت خواهد بود و تغییرشکل به صورتی از کمان دایره خواهد بود. دیاگرام لنگر نیز به صورت زیر است:



دقت شود که لنگر در نقاطی ثابت است که بر صفر باشد. عکس العمل تکیه گاه A صفر است و بنابراین برش در کل طول تیر صفر خواهد بود.

آزاد ۸۳

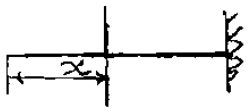
۲۱- یک صفحه فولادی به عرض 12cm و ضخامت 2cm را تحت اثر خمش محض بصورت قوسی از دایره به شعاع 10m خم می کنیم. تنش خمشی ماکزیمم صفحه چقدر است؟ $(E=2\times10^6\ kg/cm^2)$

۱) $1000\ kg/cm^2$ ۲) $500\ kg/cm^2$ ۳) $2000\ kg/cm^2$ ۴) $1500\ kg/cm^2$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\rho=1000}&=\frac{M}{EI}\\ \sigma&=\frac{Mc}{I}\end{aligned}\right\}\rightarrow \sigma=\frac{1}{1000}\times c\times E=\frac{1\times 2\times10^6}{1000}=2000\ kg/cm^2$$

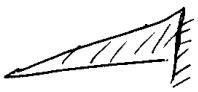
سراسری ۸۴

۵۴- تغییر شکل تیر روبرو چنان است که انحنای آن متناسب با طول تغییر می‌کند یعنی $\frac{1}{\rho}=kx$. بار وارد بر تیر چیست؟



۱) بار متمرکز در انتهای آزاد
۲) لنگر متمرکز در انتهای آزاد
۳) بار گسترده در سرتاسر تیر با شدت یکنواخت
۴) بار گسترده خطی با شدت صفر در انتهای آزاد

$\frac{1}{\rho}=kx \longrightarrow \frac{M}{EI}=kx$ ⇨ $M=(kEI)x$ دیاگرام لنگر خطی ⇨



واین دیاگرام مربوط به یک بار متمرکز در انتهای تیر است.

سراسری ۸۸

۶۳- اگر در انتهای تیر کنسول به طول l جابه‌جایی قائم بر اثر بار متمرکز قائم در انتها برابر Δ باشد، انحنای حداکثر ایجاد شده در تیر چقدر می‌باشد؟ $l=100\Delta$ است.

۱) $\frac{0/01}{6l}$ ۲) $\frac{0/01}{3l}$ ۳) $\frac{0/01}{l}$ ۴) $\frac{0/03}{l}$

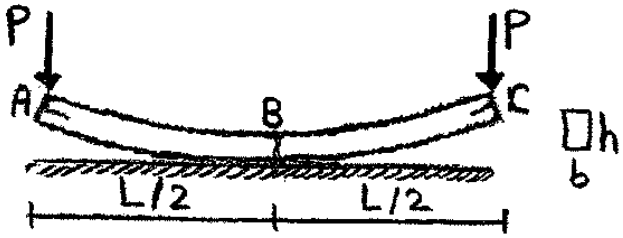
انحنای حداکثر در محل لنگر حداکثر ایجاد می شود:

$\frac{M}{EI}=\frac{1}{R} \rightarrow \frac{PL}{EI}=\frac{1}{R}$

$$\Delta=\frac{PL^3}{3EI} \rightarrow \frac{PL^3}{3EI}=0.01L \rightarrow \frac{PL}{EI}=\frac{0.03}{L} \rightarrow \frac{1}{R}=\frac{0.03}{L}$$

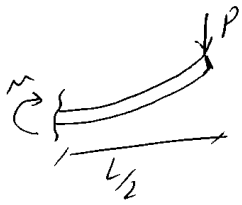
سراسری ۸۹

۵۵- در تیر مورد نظر انحناء اولیه آن بدون بار در نقطه B برابر با R_1 می‌باشد.
مقدار نیروی لازم P چقدر باشد تا انحناء در B صفر شود؟



۱) $\frac{Ebh^3}{6LR_1}$
۲) $\frac{Ebh^3}{12LR_1}$
۳) $\frac{Ebh^3}{3LR_1}$
۴) $\frac{Ebh^3}{24LR_1}$

شعاع انحنا اولیه R1 است. پس باید در نقطه B ما انحنای R1– ایجاد نماییم و برای این کار باید لنگر ایجاد شده در B برابر $M=-\frac{EI}{R_1}$ باشد.

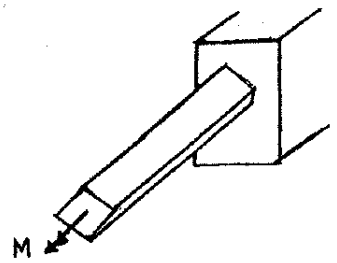


$-P\times\frac{L}{2}=\frac{-EI}{R} \rightarrow P=\frac{2EI}{LR}=\frac{2Eb\,h^3/12}{LR_1} \longrightarrow P=\frac{Eb\,h^3}{6LR_1}$

سراسری ۸۹

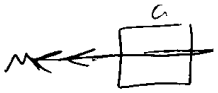
۴۷- چنانچه اضلاع مقطع چهارگوش مربع شکل برابر a باشد، انحنای ایجاد شده در اثر لنگر M را محاسبه کنید. (مدول ارتجاعی مقطع E می‌باشد.)

۱) $\frac{۲a^۲M}{AE}$ ۲) $\frac{۵M}{۱۲Ea^۴}$ ۳) $\frac{۱۲M}{Ea^۴}$ ۴) $\frac{۵Ea^۴}{۱۲M}$



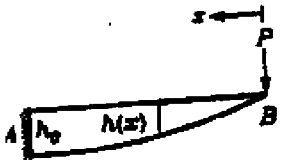
دقت شود که خمش حول محور افقی مربع است نه حول قطر آن:

$$\frac{1}{\varphi}=\frac{M}{EI}=\frac{M}{E\left(\frac{a\times a^3}{12}\right)}=\frac{12M}{Ea^4}$$



آزاد ۸۸

۵۵- تیر طره زیر تحت اثر بار P بصورت یک قوس دایره خم می شود. معادله h (x) (ارتفاع مقطع) کدام است؟



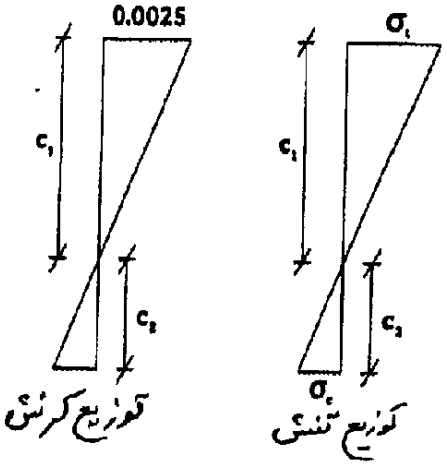
۱) $h(x)=h_0\sqrt{\frac{x}{l}}$ ۲) $h(x)=h_0\sqrt[۳]{\frac{x^۲}{l^۲}}$ ۳) $h(x)=h_0\sqrt[۳]{\frac{x}{l}}$ ۴) $h(x)=h_0\left(\frac{x}{l}\right)$

$\frac{1}{\varphi}=\frac{M}{EI}$ ثابت است $\rightarrow \frac{M}{EI}$ ثابت است $\rightarrow \frac{P\times x}{E\left(\frac{bh^3}{12}\right)}=$ ثابت $=\frac{PL}{E\frac{bh_0^3}{12}} \rightarrow \frac{x}{h^3}=\frac{L}{h_0^3} \rightarrow \boxed{h=h_0\sqrt[3]{\frac{x}{L}}}$

سراسری ۹۳

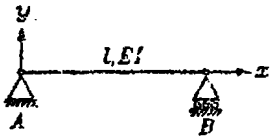
۵۵- در یک مقطع با لنگر منفی، حداکثر کرنش مثبت، ۰/۰۰۲۵ است. چنانچه مقاومت مصالح در کشش دو برابر حالت فشار باشد و شعاع انحناء ۱۰۰ متر فرض شود، ارتفاع بهینه مقطع چند سانتی‌متر است؟

۱) ۲۵
۲) ۳۷/۵
۳) ۶۲/۵
۴) ۷۵



آزاد۸۹

۵۴- تغییر مکان تیر زیر تحت اثر بارگذاری ۱ بصورت $y(x)=\frac{M}{6EIl}(x^3-3lx^2+2l^2x)$ و تحت اثر بارگذاری ۲ بصورت $y(x)=\frac{M}{6EIl}(x^3-l^2x)$ می‌باشد. اگر بارگذاریهای ۱ و ۲ بصورت همزمان بر تیر AB وارد شود انحنای وسط تیر چقدر خواهد شد؟



۱) $\frac{2M}{EI}$ ۲) $\frac{M}{EI}$

۳) ۰ ۴) $\frac{M}{2EI}$

آزاد ۹۱

۵۴- در یک مقطع تحت لنگر خمشی مثبت، کرنش در تار بالایی مقطع برابر با 2×10^{-4} می‌باشد اگر شعاع انحناء مقطع ۳۰۰ متر و تنش مجاز کششی ۲ برابر تنش مجاز فشاری باشد، ارتفاع بهینه مقطع کدام است؟

۱) ۱۲ cm ۲) ۱۶ cm

۳) ۱۸ cm ۴) ۲۰ cm

گزینه ۳

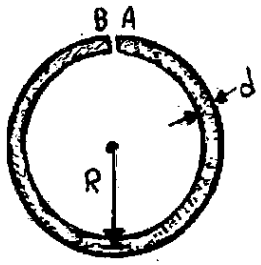
اگر فاصله تار بالایی از تار خنثی برابر y در نظر گیریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{M}{EI}=\frac{1}{R}=\frac{1}{300}\rightarrow\frac{M}{EI}=\frac{1}{300}\\ \frac{My}{EI}=0.0002\end{array}\right\}\rightarrow y=300\times0.0002=0.06\,m=6cm$$

با توجه به اینکه تنش مجاز کششی دو برابر تنش مجاز فشاری می باشد. جهت بهینه شدن باید ارتفاع کششی دو برابر ارتفاع فشاری باشد. در این صورت ارتفاع کل مقطع 18cm خواهد بود (6cm فشاری و 12cm کششی)

سراسری۸۵

۴۱- یک سیم مسی به قطر d به شکل یک دایره به گونه‌ای خم شده است که دو انتهای آن درست در تماس با یکدیگر نگه داشته شده‌اند. در صورتی‌که حداکثر کرنش مجاز مس ε باشد، کمترین طول (L) مورد نیاز برای این حالت برابر است با:



۱) $\frac{\pi d}{2\varepsilon}$

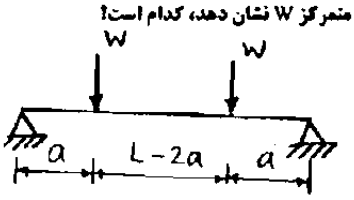
۲) $\frac{\pi d}{\varepsilon}$

۳) $\frac{2\pi d}{\varepsilon}$

۴) $\frac{4\pi d}{\varepsilon}$

تمرین: سراسری ۸۳

۵۱- در تیر متقارن شکل زیر، دقیقترین منحنی که می تواند تغییر شکل تیر را ما بین دو نیروی متمرکز W نشان دهد، کدام است؟



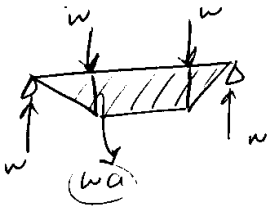
۱)دایره

۲)خط

۳)منحنی درجه ۲

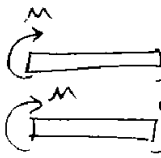
۴)بیضی با فاصله کانونی کم

$EI=$ ثابت $\rightarrow$ چون مقدار M ثابت است $\rightarrow$ دایره خواهد بود



نکته: اگر لنگرهای مختلف به تیر وارد شوند و نتیجه نهایی خواسته شود، به جای جمع لنگرها می‌توان $\frac{1}{\rho}$ را با هم جمع کرد (به ویژه اگر EI در حالتهای مختلف تغییر کند)

مثال: ابتدا دو تیر شبیه را با هم خم می‌کنیم $\rightarrow$ پس از خم کردن



آنها را به هم می‌چسبانیم $\rightarrow$

به طریقی تقاطع تیرها ρ_1 می‌باشد

حال اگر لنگر $2M$ را حذف کنیم (یا برابر با صفر کنیم) $\rightarrow \rho$ جدید؟

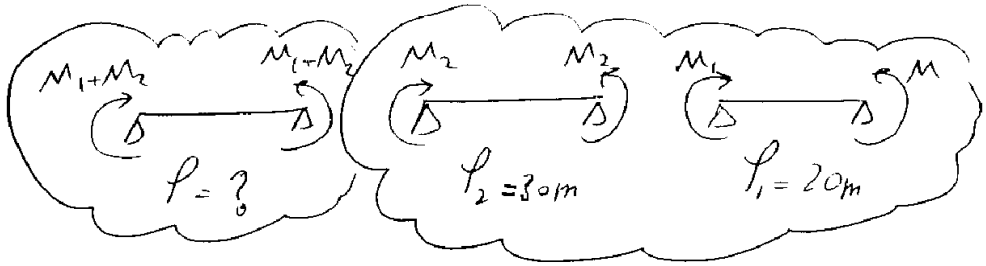
مقاطع مستطیلی هستند

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{M}{EI_1}$$ مقطع تک

$$\frac{1}{\rho_2}=\frac{-2M}{E(8I_1)}=\frac{-M}{4EI_1}$$

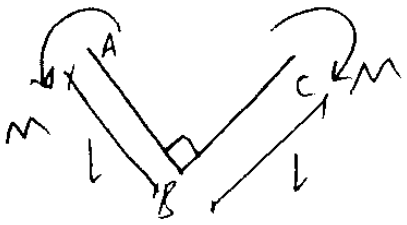
$$\rightarrow \frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{M}{EI_1}-\frac{M}{4EI_1}=\frac{3}{4\rho_1}$$ جدید

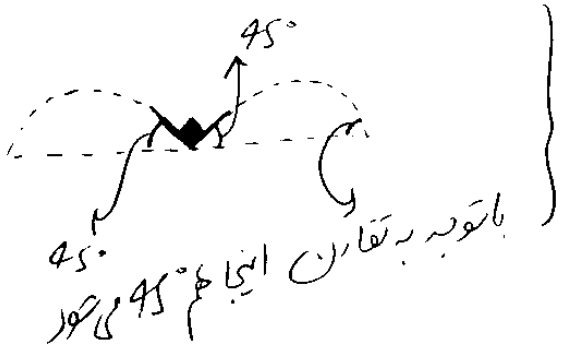
مثال:



$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\rightarrow \rho=12\,m$$

مثال: مقدار M چقدر باشد تا نقاط A، B، و C در یک امتداد قرار گیرند؟





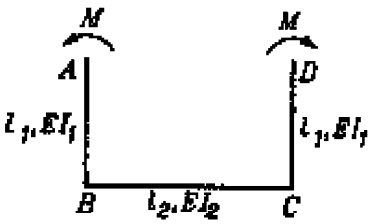
با توجه به تقارن اینجا هم 45° می‌شود

$$R = \frac{L}{(\frac{\pi}{2})} = \frac{2L}{\pi}$$

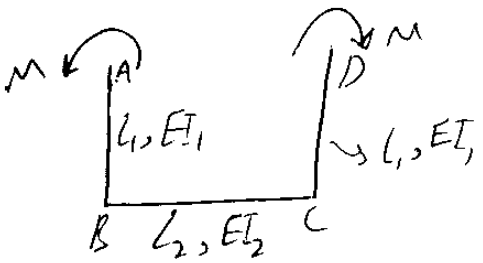
$$\Rightarrow \frac{M}{EI} = \left(\frac{1}{R} = \frac{\pi}{2L}\right) \Rightarrow M = \frac{\pi EI}{2L}$$

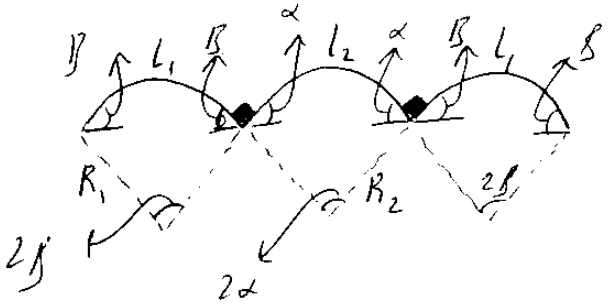
آزاد ۸۶

۴۳- در تاب زیر مقدار لنگر خمشی M چقدر باشد تا A و B و C و D در یک امتداد قرار گیرند؟



۱) $\frac{\pi}{\frac{2I_1}{EI_1} + \frac{I_2}{EI_2}}$ ۲) $\frac{\pi}{\frac{I_1}{EI_1} + \frac{2I_2}{EI_2}}$ ۳) $\frac{\pi}{\frac{I_1}{EI_1} + \frac{I_2}{2EI_2}}$ ۴) $\frac{\pi}{\frac{I_1}{EI_1} + \frac{I_2}{EI_2}}$

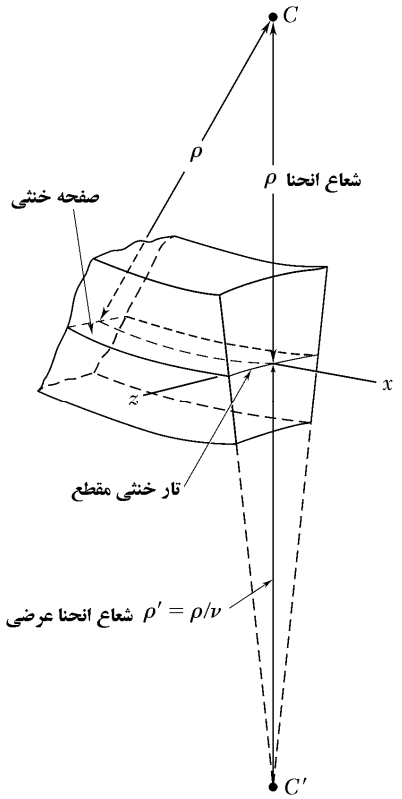




$$\alpha + \beta = 90^\circ \rightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{L_1}{2\beta} \rightarrow \beta = \frac{L_1}{2R_1} \\ R_2 = \frac{L_2}{2\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{L_2}{2R_2} \end{cases} \rightarrow \frac{L_1}{2R_1} + \frac{L_2}{2R_2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \times \left(\frac{M}{EI_1}\right) \times L_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI_2}\right) \times L_2 = \frac{\pi}{2} \rightarrow M = \frac{\pi}{\frac{L_1}{EI_1} + \frac{L_2}{EI_2}}$$

($\frac{1}{R_1}$ ↑ $\frac{M}{EI_1}$ ، $\frac{1}{R_2}$ ↑ $\frac{M}{EI_2}$)

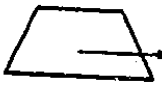


آزاد ۸۶

۵۰- در کدامیک از مقاطع زیر تحت اثر لنگر خمشی M ارتفاع مقطع کاهش می یابد؟

۱)

۲)

۳) 

۴)

۱۳-۱۰-آنالیز ابعادی

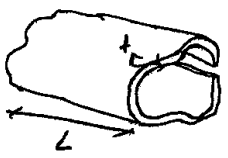
آزاد ۸۸

۷۳- اگر در یک مقطع جدار نازک باز ابعاد مقطع α برابر و ضخامت مقطع $\frac{1}{\alpha}$ برابر شود، مقاومت پیچشی و سختی پیچشی مقطع به ترتیب چند برابر خواهد شد؟

۱) $\frac{1}{\alpha}$ برابر و $\frac{1}{\alpha}$ برابر ۲) $\frac{1}{\alpha}$ برابر و $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر ۳) $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر و $\frac{1}{\alpha}$ برابر ۴) $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر و $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر

$T = \frac{1}{3} p t^2 \frac{t}{L} \rightarrow T \searrow$ برابر $\frac{1}{\alpha}$

$\frac{GJ}{L} = \frac{\frac{1}{3} p t^3}{L}$ برابر α ↑ $\rightarrow \frac{GJ}{L} \rightarrow \frac{1}{\alpha^2}$



۷۴- در یک پوسته که تحت اثر بار متمرکز P در وسط آن است اگر همه ابعاد پوسته α برابر شود لنگر خمشی و تنش خمشی ماکزیمم پوسته به ترتیب چند برابر خواهد شد؟

۱) α برابر و $\frac{1}{\alpha}$ برابر ۲) α برابر و $\frac{1}{\alpha^3}$ برابر ۳) α^2 برابر و $\frac{1}{\alpha^3}$ برابر ۴) α برابر و $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر

آزاد ۸۵

۷۷- در یک پوسته که تحت اثر وزن خود است اگر همه ابعاد پوسته α برابر شود انحناء ماکزیمم پوسته چند برابر خواهد شد؟

۱) α برابر ۲) $\frac{1}{\alpha}$ برابر ۳) $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر ۴) تغییر نمی کند

$\text{انحنا} = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{P.L}{EI}$

$P \rightarrow$ برابر α^3

$L \rightarrow$ برابر α

$I \rightarrow$ برابر α^4

$\longrightarrow$ ثابت $\leftarrow$ انحنا

آزاد ۸۴

۲۶- در یک پوسته که تحت اثر وزن خود است اگر همه ابعاد پوسته α برابر شود، تنش خمشی ماکزیمم پوسته چند برابر خواهد شد؟

۱) $\frac{1}{\alpha^2}$ ۲) α ۳) $\frac{1}{\alpha}$ ۴) α^2

$\sigma = \frac{6(PL)}{bh^2} = \frac{6(\alpha^3)(\alpha)}{(\alpha)(\alpha^2)} = \alpha$

آزاد۸۹

۴۹-اگر در یک عضو تحت پیچش فقط ابعاد مقطع α برابر شود (طول عضو ثابت بماند) مقاومت پیچشی و سختی پیچشی عضو بترتیب چند برابر خواهد شد؟

۱) α^2 برابر و α^4 برابر ۲) α^2 برابر و α^3 برابر

۳) α^3 برابر و α^3 برابر ۴) α^3 برابر و α^4 برابر

آزاد۸۹

۵۳- در یک پوسته که تحت اثر بار متمرکز P در وسط آن است اگر همه ابعاد پوسته α برابر شود شیب و تغییرمکان ماکزیمم پوسته بترتیب چند برابر خواهد شد؟

۱) $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر و $\frac{1}{\alpha}$ برابر ۲) $\frac{1}{\alpha}$ برابر و $\frac{1}{\alpha}$ برابر

۳) $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر و $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر ۴) $\frac{1}{\alpha}$ برابر و $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر

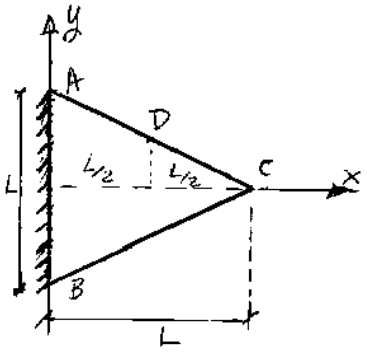
۵۴- ورق مثلثی شکل (متساوی‌الساقین) ABC با ضخامت t و وزن مخصوص γ مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید. این ورق از طریق ضلع AB به صورت صلب به تکیه‌گاه متصل بوده و تحت اثر وزن خود تحت خمش قرار دارد. اگر تنش σ_x در نقطه D برابر با σ_0 باشد، تنش σ_x در نقطه A کدام است؟

۱) $(\sigma_x)_A = \sigma_0$

۲) $(\sigma_x)_A = 2\sigma_0$

۳) $(\sigma_x)_A = \frac{1}{L}\sigma_0$

۴) $(\sigma_x)_A = 2L\sigma_0$



گزینه ۲

با استفاده از آنالیز ابعادی:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} => \frac{PLc}{I} => \frac{PL}{bh^2}$$

P وابسته به وزن بوده و در نقطه A نسبت به نقطه D به اندازه ۴ برابر افزایش دارد.

L دو برابر شده است

B همان ضخامت بوده و تغییر نکرده است

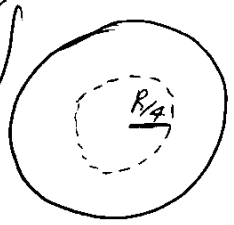
h نیز دو برابر شده است.

بنابراین تنش $\frac{4\times2}{1\times2^2} = 2$ می شود.

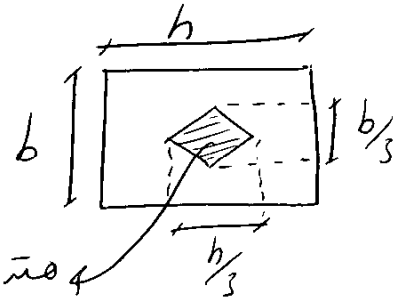
۱۳-۱۱-هسته خمش

هسته خمش: مجموعه نقاطی است که اگر بار به آنها اثر کند مقطع فقط خمش بدون محور خنثی بر مقطع مماس می شود.

برای مقطع دایره ای شکل:

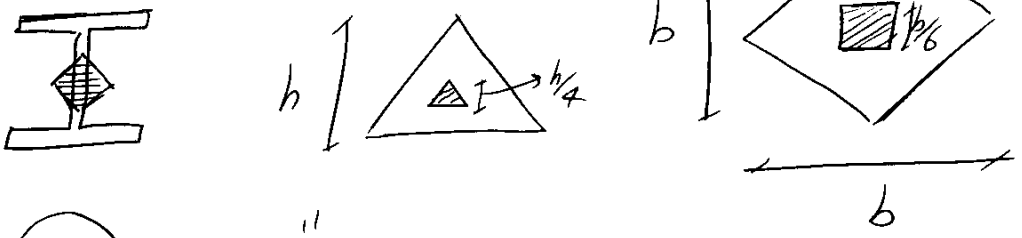


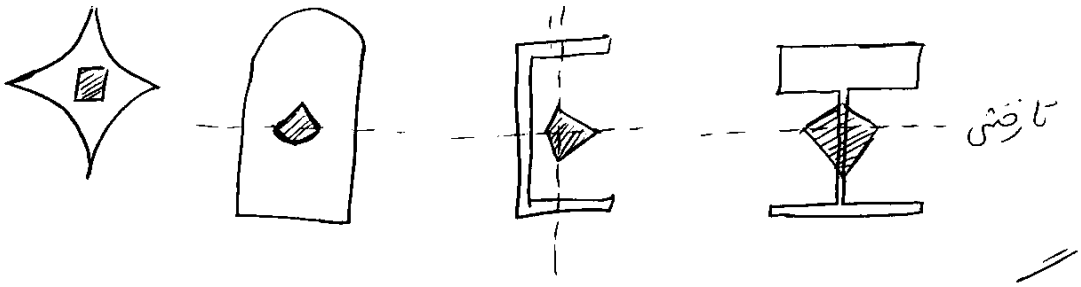
اگر بارهای داخل خط چین وارد شود هیچ نقطه ای کشش نمی افتد و همه جا تنش فشاری داریم



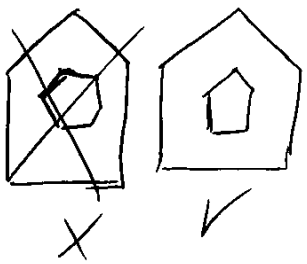
✓ اگر نیروی P روی یکی از اضلاع هسته حرکت کند تنش در راس مقابل آن صفر خواهد بود

✓ اگر نیروی P بر راس هسته وارد شود تنش ر ضلع مقابل آن راس صفر است.



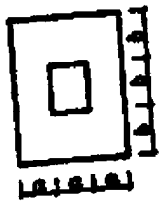


اریک h ضلعی اگر n فرد باشد شکل هسته و مقطع یکی است.



آزاد ۸۸

۵۷- هسته مقطع مستطیلی توخالی زیر کدام است؟ (a < b)



۱) یک لوزی با قطر کوچک $\frac{10a}{9}$ و قطر بزرگ $\frac{10b}{9}$

۲) یک لوزی با قطر کوچک $\frac{14a}{9}$ و قطر بزرگ $\frac{14b}{9}$

۳) یک مستطیل به ابعاد $\frac{10a}{9}$ و $\frac{10b}{9}$

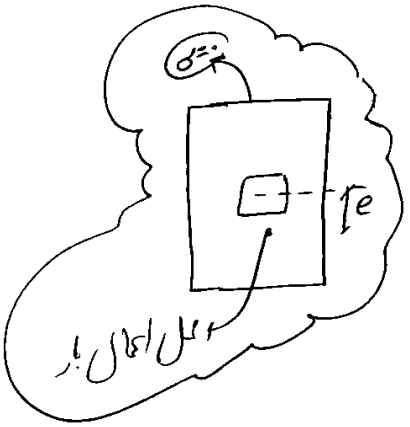
۴) یک مستطیل به ابعاد $\frac{14a}{9}$ و $\frac{14b}{9}$

$A = 3a \times 3b - ab = 8ab$

$I_n = \frac{3a(3b)^3}{12} - \frac{ab^3}{12} = \frac{20ab^3}{3}$

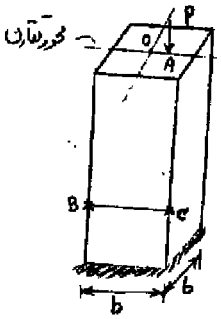
$\sigma = \frac{P}{8ab} - \frac{(Pe) \times 1.5b}{\frac{20ab^3}{3}} = 0 \longrightarrow \frac{P}{ab}\left(\frac{1}{8} - \frac{4.5e}{20b}\right) = 0$

$\longrightarrow e = \frac{20b}{8 \times 4.5} = \frac{5b}{9}$ $\longrightarrow$ قطر بزرگ لوزی $= 2 \times e = \frac{10b}{9}$



سراسری ۹۲- دکتری

۸- ستونی با مقطع مربع مفروض است. بار متمرکز P در نقطهٔ A واقع بر محور تقارن مقطع به فاصلهٔ e از مرکز مقطع o به ستون اعمال می‌شود. اگر تنش ناشی از این بار در نقطهٔ B صفر باشد، تنش در نقطهٔ C چقدر است؟



۱) صفر

۲) $\frac{2P}{b^2}$

۳) $\frac{P}{b^2}$

۴) $\frac{1/5P}{b^2}$

سراسری ۸۷

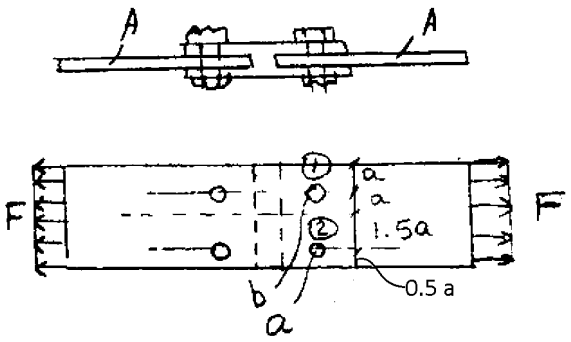
۵۸- در شکل روبرو کل نیروی وارد به هر ورق A مساوی F است. نیروی وارد به پیچ‌های a و b که با قطر یکسان هستند چقدر است؟

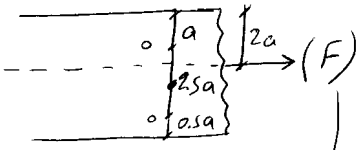
۱) $F_a = F_b = F$

۲) $F_a = F_b = \frac{F}{2}$

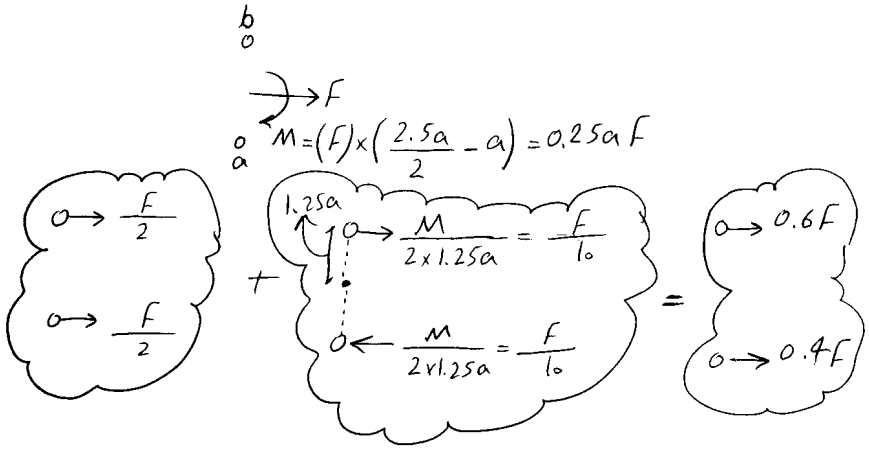
۳) $F_b = ۰/۶F \ , \ F_a = ۰/۴F$

۴) $F_b = ۰/۴F \ , \ F_a = ۰/۶F$





به مرکز سطح پیچ‌ها وارد نشده است. اگر به مرکز سطح پیچ‌ها وارد شود نیروی هر پیچ برابر $\frac{F}{2}$ می‌شود.

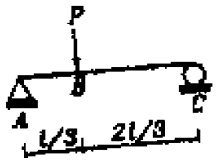


۱۴-بار گذاری عرضی (برش)

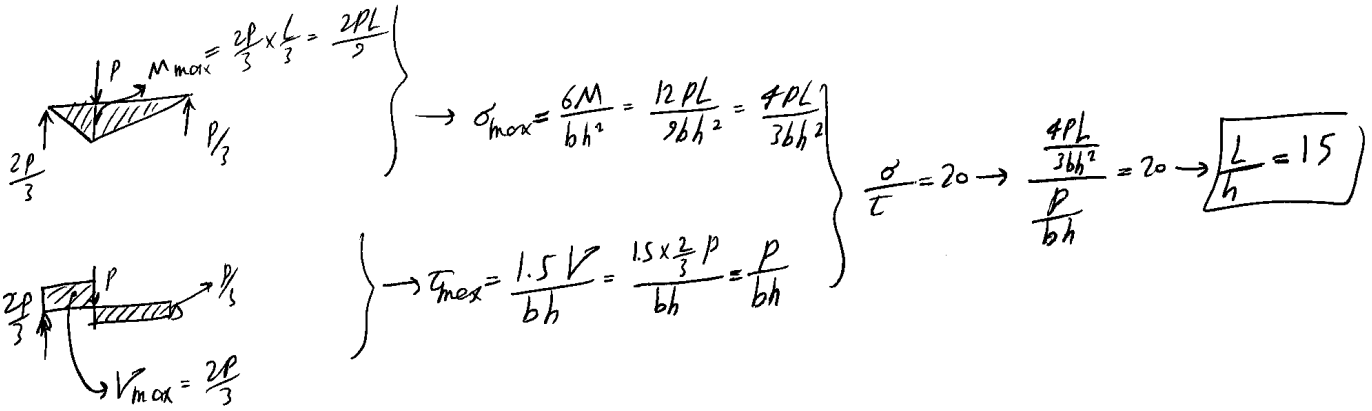
۱۴-۱-تنش برشی در مقطع توپر

آزاد ۸۸

۵۶- در تیر زیر که مقطع آن مستطیلی است، تنش خمشی ماکزیمم ۲۰ برابر تنش برشی ماکزیمم است. نسبت طول مقطع به ارتفاع آن $\left(\frac{l}{h}\right)$ کدام است؟



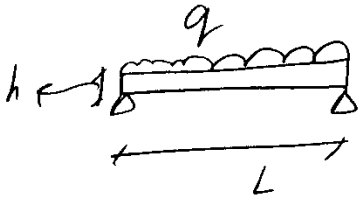
۱) 10 ۲) 15 ۳) 20 ۴) 25



تمرین: سراسری ۸۷

۶۶- بر تیر ساده‌ای به طول L بار یکنواختی به شدت q در تمام طول وارد می‌شود. مقطع تیر مستطیل به پهنای b و به ارتفاع h است. نسبت $\frac{L}{h}$ چقدر باشد که تنش خمشی ماکزیمم ده برابر تنش برشی ماکزیمم شود؟

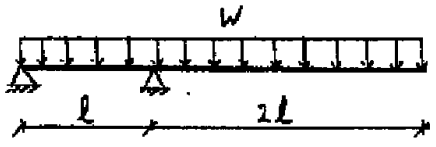
۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) ۱



$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{max} = \frac{6\left(\frac{qL^2}{8}\right)}{bh^2} \\ \tau_{max} = \frac{1.5\left(\frac{qL}{2}\right)}{bh} \\ \sigma_{max} = 10\tau_{max}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{6\left(\frac{qL^2}{8}\right)}{bh^2} = 10 \times \frac{1.5\left(\frac{qL}{2}\right)}{bh} \rightarrow \frac{L}{h} = 10$$

سراسری ۹۲- دکتری

۴- تیری با مقطع مستطیلی، به عرض b و ارتفاع h مطابق شکل زیر تحت بار گستردهٔ W قرار دارد. حداکثر تنش برشی در تیر کدام است؟

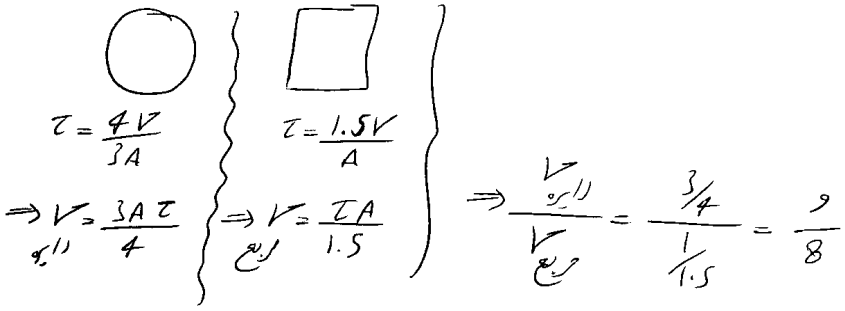


۱) $۲/۵\frac{W\ell}{bh}$
۲) $۳/۷۵\frac{W\ell}{bh}$
۳) $۳\frac{W\ell}{bh}$
۴) $۶/۷۵\frac{W\ell}{bh}$

سراسری ۸۸

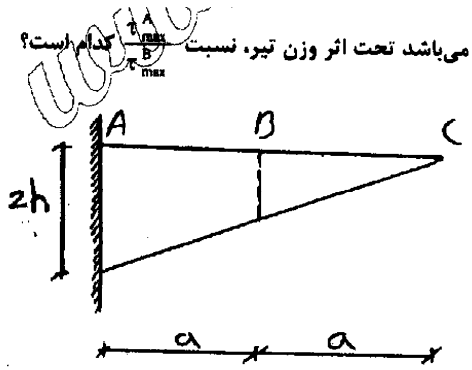
۷۰- مقطع یک تیر به شکل دایره و مقطع تیر دیگری به شکل مربع است. مساحت مقطع هر دو تیر مساوی است. نسبت مقاومت برشی تیر اول به تیر دوم برابر است با: (راهنمایی: حداکثر تنش برشی در مقطع دایره با سطح مقطع A تحت برش V برابر $\frac{4}{3}\frac{V}{A}$ می‌باشد.)

۱) $\frac{8}{9}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{9}{8}$



آزاد ۹۱

۵۶- پهنای تیر غیرمنشوری نشان داده شده در طول تیر، ثابت می‌باشد تحت اثر وزن تیر، نسبت $\frac{\tau_{A\max}}{\tau_{B\max}}$ کدام است؟ (وزن واحد حجم مصالح تیر γ فرض شود و فقط اثرات نیروی برشی در نظر گرفته شود)



۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

گزینه ۳

از آنجا گفته شده که تنها اثرات نیروی برشی درنظر گرفته شود، نیازی به محاسبه لنگر نیست.

برش در نقطه B برابر $V_B = \left(\frac{h\times b\times a}{2}\right)\gamma = \frac{hba\gamma}{2}$ می باشد. و برش در نقطه A برابر $V_A = \left(\frac{2h\times b\times 2a}{2}\right)\gamma = 2hba\gamma$ می باشد.

بنابراین نسبت تنش های برشی در این دو نقطه برابر است با:

$$\frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{\left(\frac{1.5V_A}{b(2h)}\right)}{\left(\frac{1.5V_B}{b(h)}\right)} = \frac{V_A}{2V_B} = 2$$

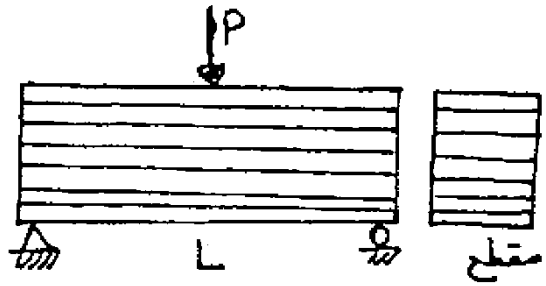
۶۸- n تیر با مقطع مستطیلی شکل که سطح مقطع هر یک از آنها A می‌باشد را یکبار بدون استفاده از چسب روی هم گذاشته و بار دیگر آنها را روی هم گذاشته و می‌چسبانیم. مقاومت برشی مجموعه تیرها در حالت دوم چند برابر اول است؟ (مقاومت برشی چسب از مقاومت برشی جنس تیر بیشتر است).

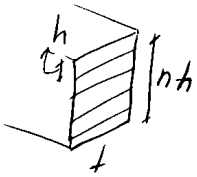
۱) ۲

۲) ۱/۵n

۳) ۱

۴) n



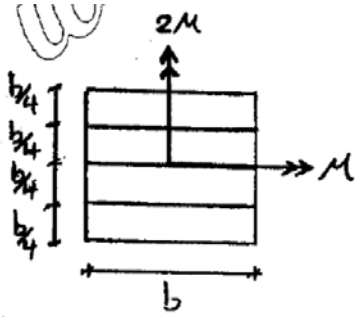


مقاومت برشی $V = \frac{\tau(Ih)}{Q}$

$\begin{cases} \text{با چسب} \rightarrow V = \frac{\tau(hh)}{1.5} \\ \text{بدون چسب} \rightarrow V = n\left[\frac{\tau(hh)}{1.5}\right] \end{cases}$

بنابراین مقاومت تغییر می‌کند

آزاد ۹۱



۵۲- در مقطع نشان داده شده که تحت لنگرهای خمشی حول محور افقی و قائم قرار گرفته است نسبت حداکثر تنش خمشی در حالتی که تیغه‌ها به هم متصل شده‌اند به حالتی که چهار تیغه اتصالی به یکدیگر ندارند کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{6}$

۴) $\frac{1}{8}$

گزینه ۱

در حالتیکه تیغه ها متصل هستند:

$$\sigma_1 = \frac{6M}{b^3} + \frac{6(2M)}{b^3} = \frac{18M}{b^3}$$

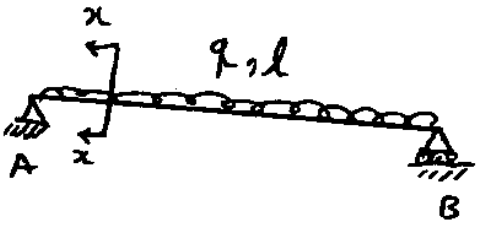
در حالتیکه تیغه ها متصل نیستند:

$$\sigma_2 = \frac{6\left(\frac{M}{4}\right)}{b\left(\frac{b}{4}\right)^2} + \frac{6\left(\frac{2M}{4}\right)}{b^2\left(\frac{b}{4}\right)} = \frac{36M}{b^3}$$

بنابراین نسبت تنش برابر است با:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

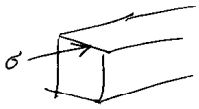
آزاد ۸۵



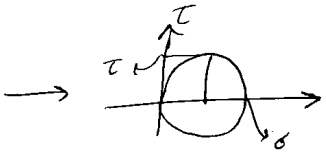
۶۸- در تیر مستطیلی زیر تنش برشی ماکزیمم در بالاترین نقطه مقطع (0) چقدر است؟
(مقطع x – x در فاصله $\frac{l}{4}$ از تکیه گاه A می باشد.)

۱) $\frac{9ql^2}{32bh^2}$ ۲) $\frac{19ql^2}{16bh^2}$ ۳) $\frac{9ql^2}{64bh^2}$ ۴) 0

در بالاترین نقطه تنش برشی ناشی از برش صفر است و تنها تنش خمشی داریم



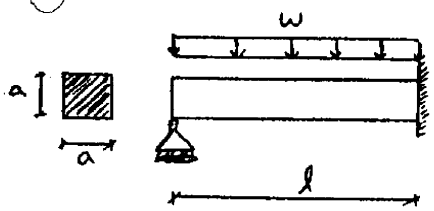
$\sigma = \frac{6M}{bh^2} \Rightarrow M = \left(\frac{9L}{2} \times \frac{L}{4}\right) - \frac{9\left(\frac{L}{4}\right)^2}{2} = \frac{39L^2}{32} \rightarrow \boxed{\sigma = \frac{6 \times 39L^2}{32bh^2} = \frac{9 \cdot 9L^2}{16bh^2}}$



$\boxed{\tau_{max} = \frac{\sigma}{2} = \frac{9 \cdot 9L^2}{32bh^2}}$

آزاد ۹۱

۶۰- حداکثر بار گسترده w را به گونه‌ای تعیین نمایید که تنش برشی هیچ کدام از نقاط مقطع از تنش مجاز برشی مصالح (τ_w) فراتر نرود؟ (از اثرات خمش صرفنظر شود)



۱) $\frac{17}{12}\frac{a^2 \times \tau_w}{\ell}$ ۲) $\frac{4}{5}\frac{a^2 \times \tau_w}{\ell}$

۳) $\frac{3}{14}\frac{a^2 \times \tau_w}{\ell}$ ۴) $\frac{16}{15}\frac{a^2 \times \tau_w}{\ell}$

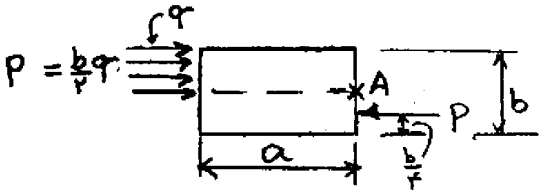
گزینه ۴

لنگر تیکه گاه گیردار با استفاده از روش شیب افت برابر $M = \frac{wL^2}{8}$ می باشد. و بنابراین با استفاده از روابط استاتیکی، عکس العمل تکیه گاه مفصلی برابر $V_L=3wL/8$ و عکس العمل برشی تیکه گاه گیردار برابر $V_R=5wL/8$خواهد بود. و در نتیجه برش حداکثر در تیر برابر با 5qL/8 می باشد.و در نتیجه:

$$\tau = \frac{1.5V}{a^2} = \frac{15wL}{16a^2} \leq \tau_{all} \rightarrow w \leq \frac{16a^2}{15L}\tau_{all}$$

سراسری ۸۷

۶۵- مکعب مستطیلی مطابق شکل روبرو زیر اثر نیرو قرار گرفته است. تنش برشی در A چقدر است؟ ابعاد مکعب مستطیل a، b و c است.



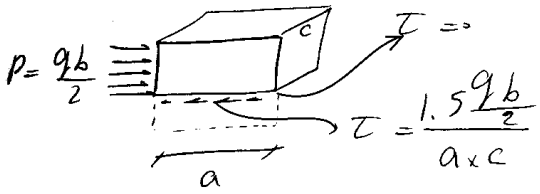
۱) $\frac{P}{ab}$

۲) $\frac{P}{ac}$

۳) $\frac{P}{bc}$

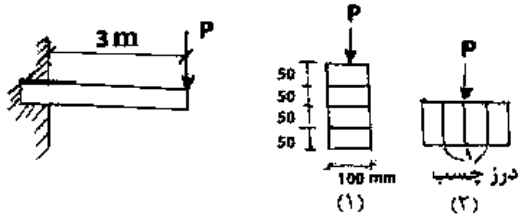
۴) صفر

گزینه ۴:



سراسری ۹۴

۴۹- چهار الوار با مقطع مستطیل به ابعاد ۱۰۰×۵۰ میلی‌متر توسط چسب به یکدیگر متصل و تیر کنسولی با دو مقطع (۱) و (۲) مطابق شکل بوجود آورده‌اند. حداقل مقاومت برشی چسب برای هر یک از دو مقطع نشان داده شده، کدام است؟



۱) $(\tau_{min})_1 = 4(\tau_{min})_2$

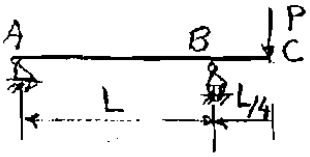
۲) $(\tau_{min})_1 = (\tau_{min})_2 = \frac{P}{20000}$

۳) $(\tau_{min})_1 = \frac{3P}{40000}$ ، $(\tau_{min})_2 = 0$

۴) $(\tau_{min})_1 = \frac{3P}{125000}$ ، $(\tau_{min})_2 = \frac{75P}{10^6}$

تمرین: سراسری ۸۳

۴۲- مقطع تیر شکل روبرو I می باشد. نسبت تنش برشی ماکزیمم در قسمت AB به تنش برشی ماکزیمم در قسمت BC چقدر است؟

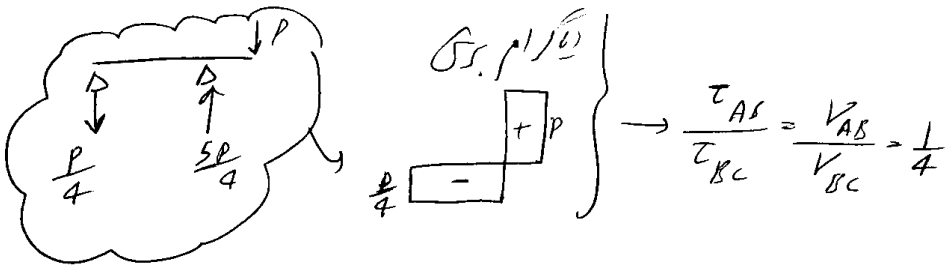


۱) ۱

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) $\frac{1}{5}$

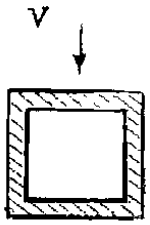


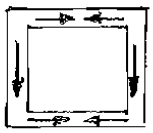
$\rightarrow \frac{\tau_{AB}}{\tau_{BC}} = \frac{V_{AB}}{V_{BC}} = \frac{1}{4}$

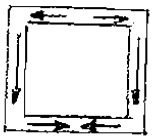
۱۴-۲-جریان برش در مقاطع جدارنازک

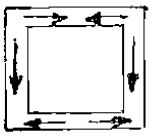
سراسری۸۶

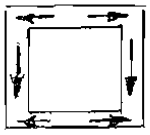
۵۸- برای مقطع شکل مقابل که تحت نیروی برشی قائم V می‌باشد، کدام‌یک از جریان‌های برشی در مقطع صحیح می‌باشد؟



۱) 

۲) 

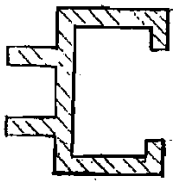
۳) 

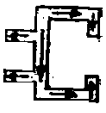
۴) 

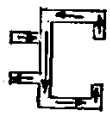
گزینه ۲

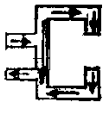
سراسری ۸۵

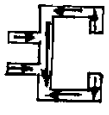
۵۲- برای مقطع شکل مقابل که تحت نیروی برشی قائم V می‌باشد، کدام‌یک از جریان‌های برش صحیح است؟



۱) 

۲) 

۳) 

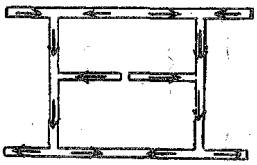
۴) 

گزینه ۲

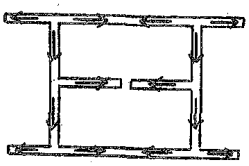
آزاد ۹۲

۵۹- توزیع جریان برشی تحت نیروی برشی قائم اعمال شده به مقطع متقارن جدار نازک، در کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

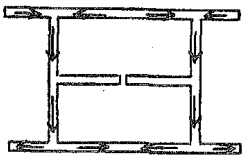
۱)



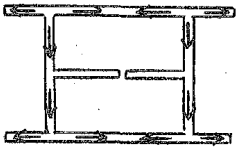
۲)

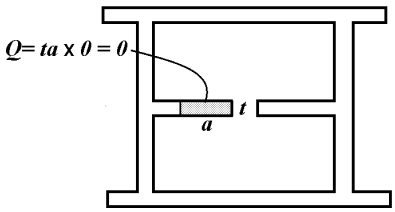


۳)



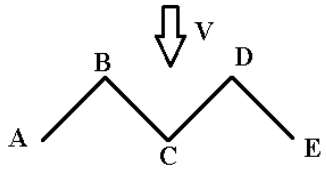
۴)

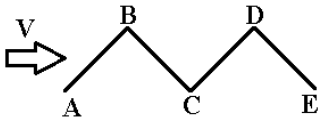


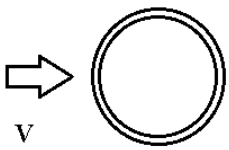


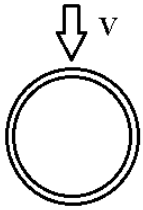
گزینه ۳. دقت شود که مقدار Q در زائده داخلی صفر بوده و تنش در آن نیز صفر است.

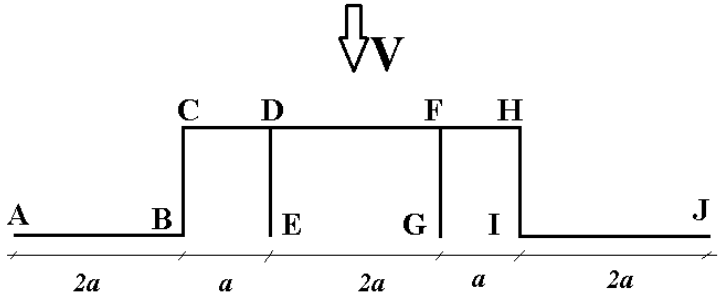
در چه نقاطی از مقاطع جدار نازک تنش برشی ناشی از برش صفر است؟





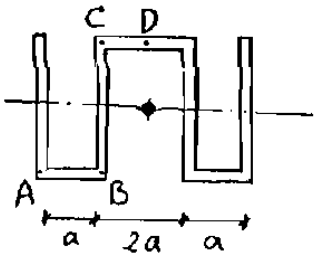






سراسری ۸۳

۴۹- در مقطع متقارن شکل زیر نیروی برشی موازی BC می باشد. تنش برشی در کدام یک از نقاط اشاره شده صفر خواهد بود(ضخامت ثابت است).

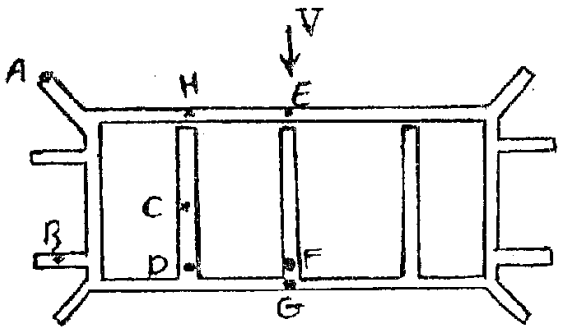


۱) D,B
۲) D,A
۳) C,B
۴) C,A

گزینه ۲

آزاد ۹۰

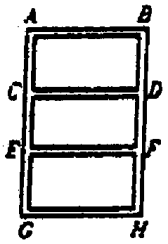
۶۰- تنش برش ایجاد شده ناشی از نیروی برشی V در کدام یک از نقاط از مقطع متقارن نشان داده شده صفر نمی‌باشد؟ (ضخامت تمام قسمتها یکسان است)



۱) H, B, F, D
۲) B, C, G
۳) D, F, G, H
۴) H, B, C

آزاد ۸۷

۵۷- در چند نقطه از مقطع زیر تحت اثر برش قائم V تنش برشی برابر صفر است؟ (ضخامت مقطع ثابت است.)

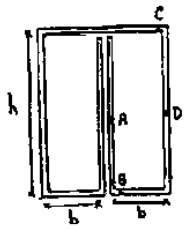


۱) صفر ۲) ۲ ۳) ٤ ٤) ٦

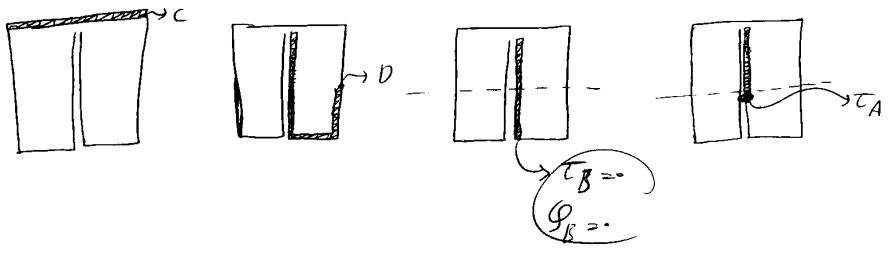
گزینه ۳

تمرین: سراسری ۸۱

۳۶- در کدام نقطه از مقطع زیر که ضخامت یکنواختی دارد، مقدار تنش برشی برابر با صفر است ؟

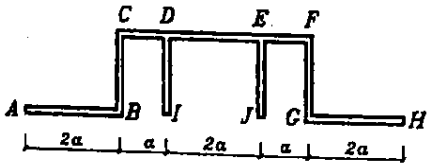


۱) D
۲) A
۳) C
۴) B



آزاد ۸۶

۵۵- در چند نقطه از مقطع زیر تحت اثر برش قائم V تنش برشی برابر صفر است؟
(ضخامت مقطع ثابت است)



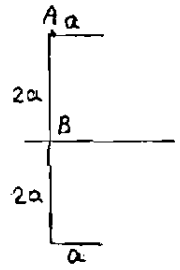
۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۱

گزینه ۳

۱۴-۳-تنش در مقاطع جدارنازک

سراسری ۸۴

۵۱- ناودانی مطابق شکل روبرو به ضخامت ثابت و کم t است. اگر نیروی برشی V در جهت محور قائم بدان وارد شود، نسبت $\frac{\tau_A}{\tau_B}$ چقدر است؟

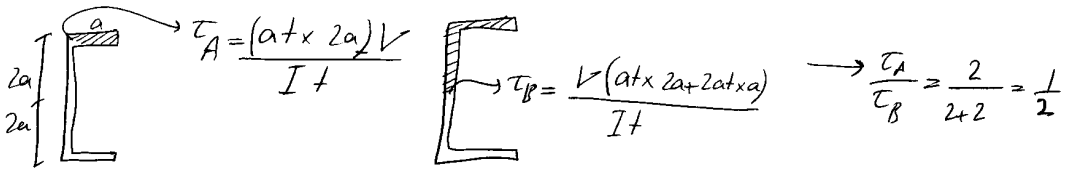


۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۲}$

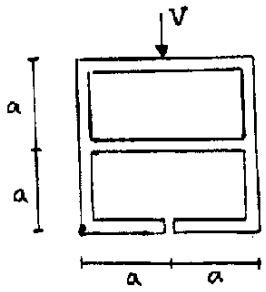
۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۲}{۳}$



سراسری ۹۳

۵۱- در مقطع جدار نازک نشان داده شده که تحت نیروی برشی V قرار دارد، تنش برشی حداکثر کدام است؟ (ضخامت تمام قسمت‌ها ثابت و برابر t می‌باشد)



۱) $\frac{۷}{۱۶}\frac{V}{at}$

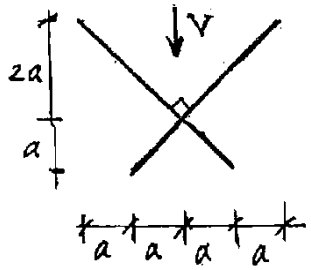
۲) $\frac{۱۵}{۳۲}\frac{V}{at}$

۳) $\frac{۹}{۳۲}\frac{V}{at}$

۴) $\frac{۹}{۱۶}\frac{V}{at}$

سراسری ۸۴

۵۲- مقطع تیری فلزی مطابق شکل از ورق با ضخامت نازک t ساخته شده است. بر اثر برش V، حداکثر تنش برشی در ورق‌ها چقدر است؟

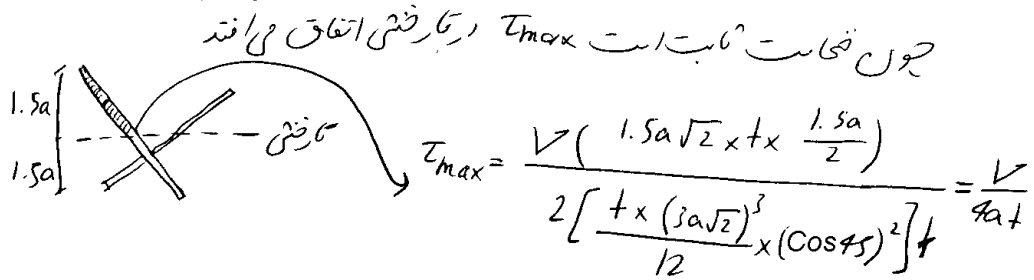


۱) $\frac{V}{۶at}$

۲) $\frac{V}{۴\sqrt{۲}at}$

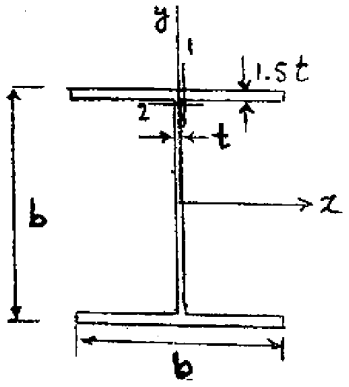
۳) $\frac{V}{۴at}$

۴) $\frac{V}{۳\sqrt{۲}at}$



سراسری ۸۷

۶۸- شکل روبرو مقطع تیری را نشان می‌دهد که زیر اثر نیروی برشی V در امتداد y قرار دارد. اگر τ_1 تنش برشی افقی در محل اتصال بال و جان روی بال و τ_2 تنش برشی قائم در محل اتصال بال و جان روی جان باشد و مقدار t نسبت به b کوچک فرض شود نسبت $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ کدام است؟

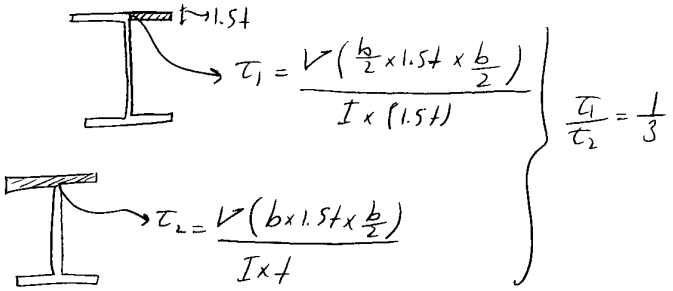


۱) ۱

۲) $\frac{۲}{۳}$

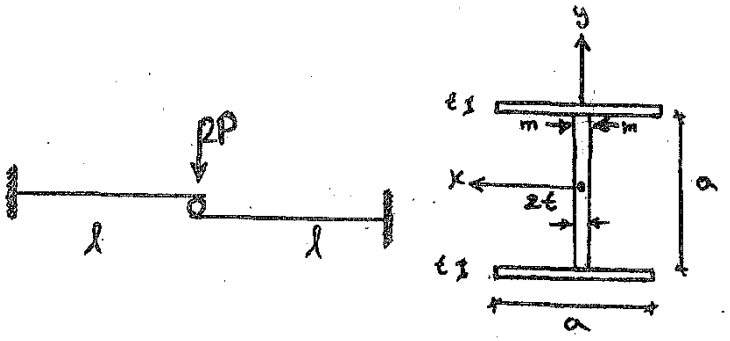
۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۱}{۳}$



آزاد ۹۲

۵۸- در تیر با مقطع جدار نازک نشان داده شده تنش برشی در مقطع $(m-m)$ در محل اتصال بال و جان کدام است؟ (I_o ممان اینرسی مقطع نسبت به محور x می‌باشد و از اثرات خمش صرفنظر شود)



۱) $\frac{Pa^2}{I_o}$

۲) $\frac{1}{2}\frac{Pa^2}{I_o}$

۳) $\frac{1}{4}\frac{Pa^2}{I_o}$

۴) $\frac{1}{8}\frac{Pa^2}{I_o}$

گزینه ۳: با توجه به تقارن، برش در هر دو تیر برابر P خواهد بود و تنش برشی در جان تیر برابر خواهد بود با:

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{P\left(ta\times\frac{a}{2}\right)}{I_0(2t)} = \frac{Pa^2}{4I_0}$$

سراسری ۹۰

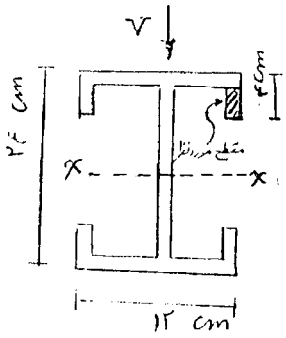
۵۲- شکل مقابل مقطع تیری است که تحت برش V قرار دارد. اگر I_x ممان اینرسی مقطع و ضخامت در همه جا ۲ سانتی‌متر باشد تنش برشی در مقطع نشان داده شده کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $9\frac{V}{I}$ به طرف پایین

۲) $18\frac{V}{I}$ به طرف پایین

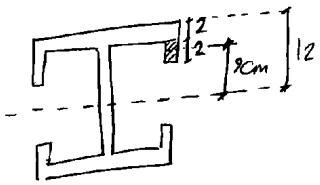
۳) $9\frac{V}{I}$ به طرف بالا

۴) $18\frac{V}{I}$ به طرف بالا



فاصله مرکز هاشور تا مرکز ثقل — ممانت هاشور — ضخامت

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V\left(2\times2\times(9)\right)}{I\times2} = \frac{18V}{I}$$



سراسری ۸۸

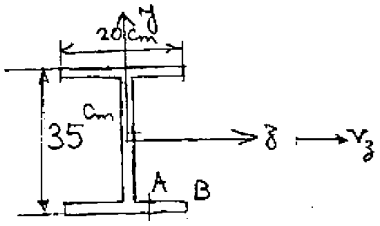
۶۹- در شکل روبه‌رو محورهای y و z محورهای تقارن هستند. اگر $V_z = 20\ ton$ باشد. تنش برشی در نقطه‌ی A بر حسب $\frac{kg}{cm^2}$ چقدر است؟ ضخامت جان و بال‌ها، همه جا یک سانتی‌متر و $AB = 6cm$ می‌باشد.

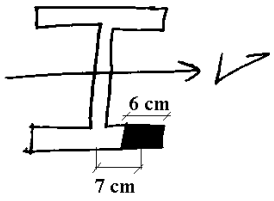
۱) ۵۰۰

۲) ۳۱۵

۳) ۶۳۰

۴) ۷۵۰





$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{20000\times(6\times1\times7)}{\left(2\times\frac{1\times20^3}{12}\right)\times1} = 630\frac{kg}{cm^2}$$

سراسری ۹۲

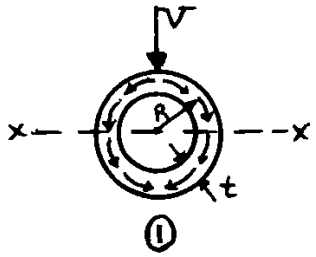
۴۸- **نیروی برشی قائم V بر دو مقطع جدار نازک با شعاع (R) و ضخامت (t) یکسان اعمال می‌شود. لولهٔ شماره ۱ بدون درز و شکاف است؛ ولی لولهٔ ۲ در راستای محور x − x دارای درز است، و باز می‌باشد. نسبت تنش برشی ماکزیمم لولهٔ ۱ به تنش برشی ماکزیمم لولهٔ ۲ چند است؟**

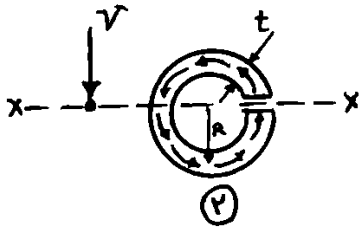
۱) ۲

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{3}{2}$

۴) $\frac{1}{4}$



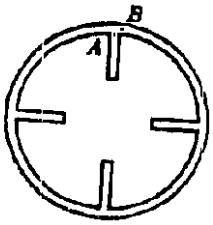


گزینه ۲

$$\left.\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{VQ}{I(2t)}\\ \tau_2 &= \frac{VQ}{I(t)}\end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{1}{2}$$

آزاد۸۹

۵۶- در مقطع زیر که ضخامت حلقه t_1 و ضخامت داخلی t_2 باشد، نسبت $\frac{\tau_A}{\tau_B}$ کدامست؟



۱) $\frac{2t_1}{t_2}$ ۲) $\frac{t_1}{t_2}$

۳) $\frac{t_2}{t_2}$ ۴) $\frac{2t_2}{t_1}$

گزینه ۱

تمرین: سراسری ۷۹

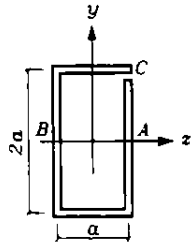
مقطع جدار نازک شکل داده شده در نقطهٔ C باز می‌باشد. ضخامت جدار ثابت است. نیروی برشی در امتداد محور y می‌باشد و از مرکز برش عبور می‌کند. نسبت تنش‌های برشی در نقاط A و B چقدر است؟ $(\frac{\tau_A}{\tau_B})$

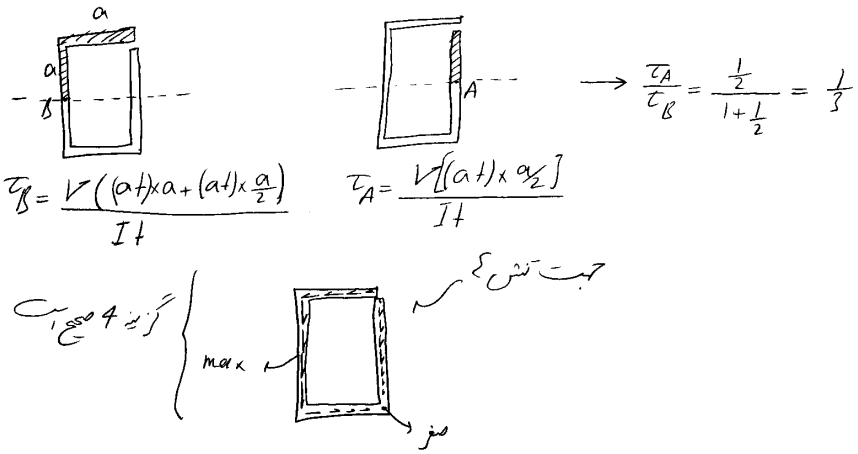
۱) ۱- (جهت تنش‌ها مختلف است)

۲) $\frac{1}{3}$- (جهت تنش‌ها مختلف است)

۳) ۱ (جهت تنش‌ها یکی است)

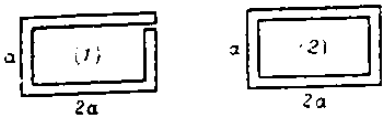
۴) $\frac{1}{3}$ (جهت تنش‌ها یکی است)





تمرین: آزاد ۸۷

۵۸- تحت اثر برش قائم یکسان که در مرکز برش اثر می کند نسبت تنش برشی ماکزیمم مقطع باز اول به مقطع بسته دوم در شکلهای زیر چقدر است؟
(t = Const , t << a)



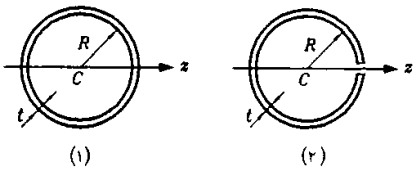
۱) ۰/۹ ۲) ۱/۵ ۳) ۱٫۶۷ ۴) ۱/۸

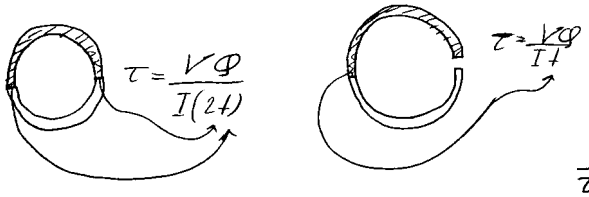
گزینه ۴

تمرین: سراسری ۸۰

نیروی برشی قائم V در مرکز برش دو مقطع (۱) و (۲) وارد می‌شود. شکل (۱) لولهٔ بسته و شکل (۲) لوله‌ای است که روی محور z، جدار آن به هم چسبیده نیست. نسبت تنش برشی ماکزیمم در شکل (۱) به تنش برشی ماکزیمم در شکل (۲) کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$





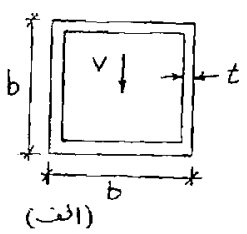
چون گفته V در مرکز برش وارد می‌شود بنابراین برش خالص داریم

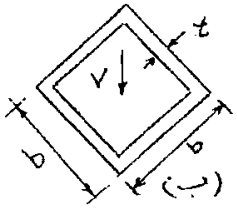
در هر دو شکل Φ و I و V ثابت است بنابراین $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{1}{2}$

تمرین: سراسری ۸۴

۵۳- با توجه به مقاطع نشان داده شده نسبت تنش برشی ماکزیمم مقطع شکل «ب» به تنش برشی ماکزیمم مقطع شکل «الف» برابر است با:

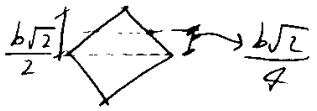
۱) ۱
۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
۴) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$





$$\tau_{\text{الف}} = \frac{V\left(bt \times \frac{b}{2} + 2\left(\frac{bt}{2} \times \frac{b}{4}\right)\right)}{I \times 2t} = \frac{0.375\,Vb^2}{I}$$

ب) $$\tau = \frac{V\left(2\left(bt \times \frac{b\sqrt{2}}{4}\right)\right)}{I \times 2(t)} = \frac{0.25\sqrt{2}\,Vb^2}{I}$$



نکته: چون □ در هر مقطعی تقارن محور برای دارد I آن با برش مقطع تغییر نمی‌کند

$$\frac{\tau_{\text{ب}}}{\tau_{\text{الف}}} = \frac{0.25\sqrt{2}}{0.375} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$ بنابراین I در دو شکل یکسان است

۱۴-۴-اتصال با میخ

سراسری ۸۵

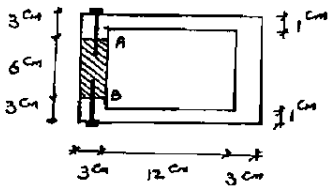
۵۱- مقطع شکل مقابل از قطعات چوبی که توسط پیچ در محل های B و A متصل، شده اند، تشکیل یافته است. در صورتی که فواصل **پیچ ها در طول عضو برابر ۱۰cm و نیروی برشی مجاز هر پیچ ۱۰۰۰kg باشد، مطلوبست حداکثر نیروی برشی مجاز قابل تحمل توسط مقطع: (I= ممان اینرسی مقطع)**

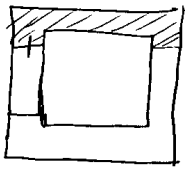
۱) ۰/۶۸I(kg)

۲) ۱/۰I(kg)

۳) ۱/۳۶I(kg)

۴) ۲/۷۲I(kg)

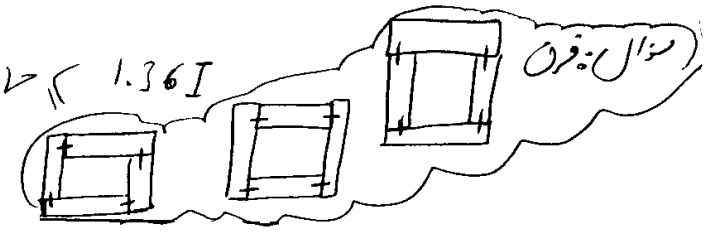




$$\tau_A = \frac{V(12\times1\times5.5 + 2(3\times3\times4.5))}{I\times6} \longrightarrow \tau_A = \frac{24.5V}{I}\ kg/cm^2$$

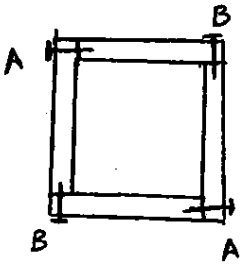
$$\text{نیروی هر پیچ} = \tau_A \times (\text{مساحت تاثیر هر پیچ}) = \frac{24.5V}{I}(3\times10) = \frac{735V}{I}$$

$$\frac{735}{I}V \le 1000 \Rightarrow V \le 1.36I$$

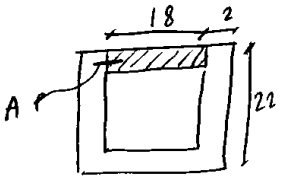


آزاد ۸۵

مطابق شکل زیر از اتصال چهار انوار به ابعاد 2cm × 20 cm تیری با مقطع جعبه ای ساخته شده است. اگر تیر تحت اثر برش قائم ۰/۵ تن قرار بگیرد و نیروی برشی مجاز هر میخ 200 کیلوگرم نیرو باشد حداکثر فاصلهٔ بین میخهای A چقدر می تواند باشد؟



۱) ۱۷ cm ۲) ۱۹/۶ cm ۳) ۲۴ cm ۴) ۲۱/۹ cm

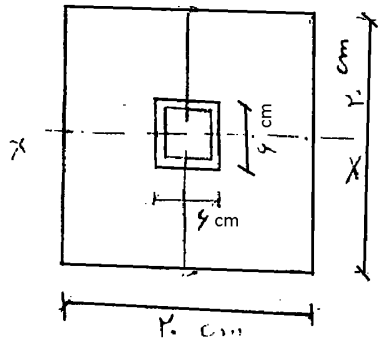


$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{(500)(18\times2\times10)}{\underbrace{\left(\frac{22^4}{12}-\frac{18^4}{12}\right)}_{I}\times\underbrace{2\times2}_{t}} = 4.2$$

$$\left\{\text{نیروی هر میخ} = \tau_A \times (2\times S)\right\} < 200 \rightarrow S < \frac{200}{2\times\tau_A} = 24\,cm$$

سراسری ۹۰

مقطع نشان داده شده در شکل متشکل از دو قطعه‌ی چوبی مجزّا می‌باشد که به وسیله پیچ کردن آنها در بالا و پایین به وجود آمده است. چنانچه پیچ‌ها به فاصله ۱۰ cm از یکدیگر در طول عضو به کار برده شوند و نیروی مجاز برشی هر پیچ ۱۰۰۰kg بوده و تنش مجاز چوب $50\ \frac{kg}{cm^2}$ باشد، حداکثر نیروی برشی مجاز قابل تحمل (V) توسط مقطع چند کیلوگرم است؟ ($I_x = 13333cm^4$)

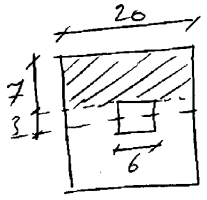


۱) ۲۴۴۲
۲) ۴۸۸۴
۳) ۴۴۴۴
۴) ۱۳۳۳۳

۵۵ کنترل تنش در چوب:

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{1.5V}{A} < 50 \Rightarrow \frac{1.5V}{20\times20} < 50 \rightarrow V < 13333\,kg$$

کنترل تنش پیچ:



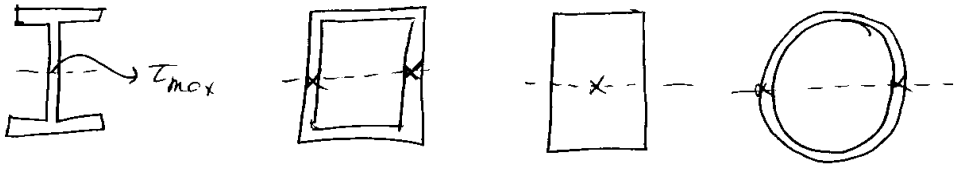
$$\tau \times A < 1000 \Rightarrow \frac{VQ}{It}\times A < 1000$$

$$\frac{V\times(7\times20\times6.5)}{\frac{20^3}{12}\times20}\times\frac{A}{6\times10} < 1000$$

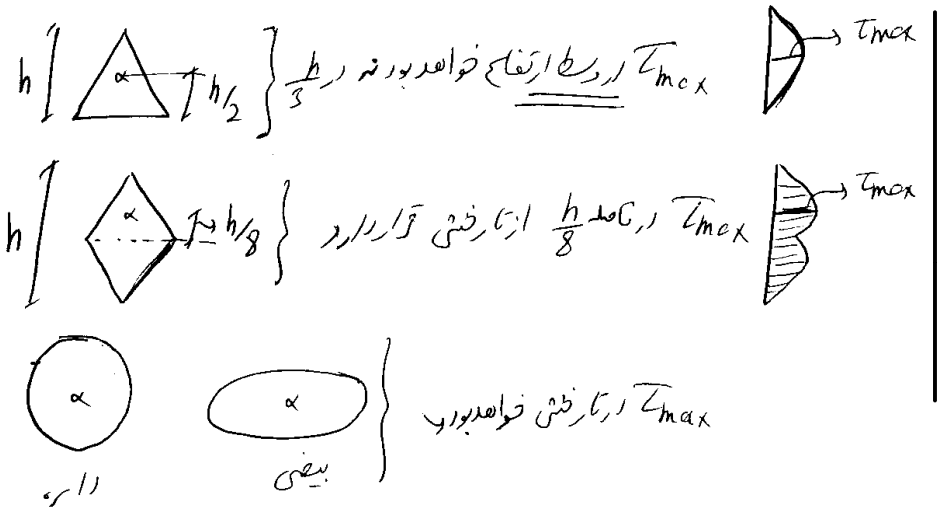
$$\Rightarrow V < 4884\,kg \longrightarrow \text{پیچ تعیین کننده است}$$

۱۴-۵-تنش برشی در مقاطع با عرض متغیر

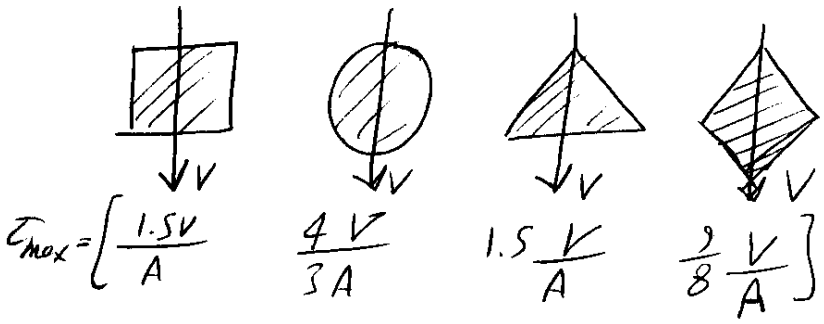
تنش برشی حداکثر: اگر ضخامت جداره ثابت باشد τ_{max} در تارخنثی اتفاق می‌افتد.



ولی اگر ضخامت ثابت نباشد

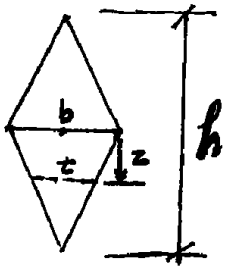


اقتصادی ترین مقطع برای برش، لوزی می باشد:



سراسری ۹۲

۴۶- در مقطع تیر نشان داده شده در شکل، که تحت برش قائم V قرار دارد، ماکزیمم تنش برشی در چه تاری (Z) به وقوع می‌پیوندد.



۱) $Z=\frac{h}{۱۲}$

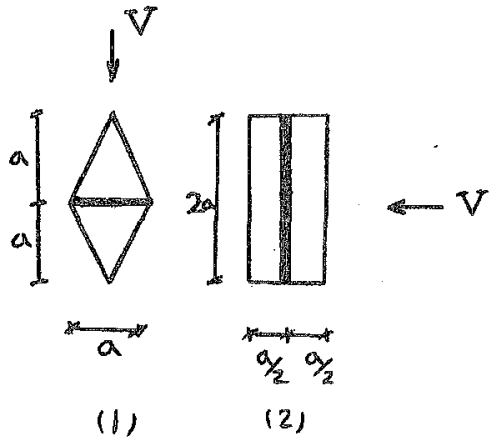
۲) $Z=\frac{h}{۶}$

۳) $Z=\frac{h}{۸}$

۴) $Z=۰$

آزاد ۹۲

۶۰- نسبت تنش برشی ایجاد شده در چسب در مقطع (۱) به (۲) تحت نیروی برشی V کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۱/۵

۳) ۲ ۴) ۲/۵

گزینه ۲:

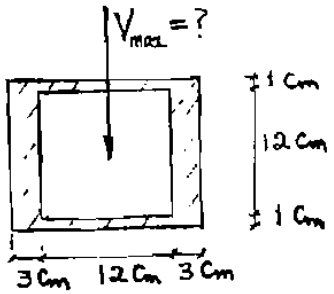
در مقطع لوزی تنش برشی حداکثر در محل چسب برابر است با: $\tau = \frac{9}{8}\frac{V}{A} = \frac{9}{8}\frac{V}{a^2}$

در مقطع مستطیلی تنش برشی حداکثر در محل چسب برابر است با: $\tau = \frac{3}{2}\frac{V}{A} = \frac{3}{2}\frac{V}{2a^2} = \frac{3}{4}\frac{V}{a^2}$

سراسری ۸۱

۴۵- در مقطع شکل مقابل ، چنانچه تنش مجاز برشی مصالح متشکله $960\ \frac{kg}{cm^2}$ باشد ، ظرفیت برش قائم بر حسب ton کدام است ؟

۱) ۴۸/۱
۲) ۵۸/۸
۳) ۶۱/۵
۴) ۱۱۸/۲



$\tau = \frac{VQ}{It}$ ⇨ ظرفیت برشی $= \frac{\tau(It)}{Q} = \frac{960\left(\frac{18\times14^3}{12} - \frac{12\times12^3}{12}\right)\times 6}{2\times(6\times3)\times3 + 18\times1\times6.5} = 61132.8\,kg = 61.5\ ton$

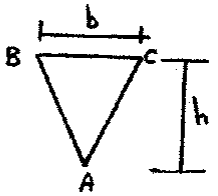
مقدار فوق بر اساس تنش خرابی در میانه مقطع می باشد. از آنجا که ضخامت جدار در بالها کمتر است، باید تنش بالها را هم چک کنیم:

$V = \frac{\tau(It)}{Q} = \frac{960\ (I)\times2}{12\times1\times6.5} = 58781\ kg = 58.8\ ton$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است

سراسری۸۹

۴۸- چنانچه نیروی برشی وارده بر مقطع مثلثی شکل نشان داده شده برابر V باشد، تنش برشی حداکثر در چه فاصله‌ای از نقطـه A در روی مقطع ایجاد می‌شود؟



۱) $\frac{h}{2}$
۲) $\frac{h}{3}$
۳) $\frac{h}{4}$
۴) $\frac{2h}{3}$

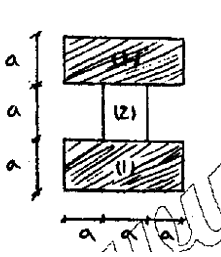
آزاد۸۹

۵۷- اگر برش تعیین کننده طراحی باشد کدام یک از مقاطع زیر اقتصادی‌تر است؟

۱) مستطیل ۲) مثلث

۳) دایره ۴) لوزی

آزاد ۹۱



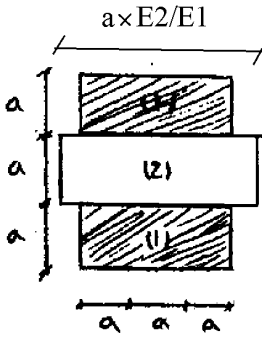
۵۹- در مقطع غیرهمگن مقابل، نسبت $\frac{E_2}{E_1}$ چقدر باشد تا تنش برشی حداکثر ایجاد شده تحت نیروی برش قائم در قطعه ۲، پنج برابر قطعه ۱ شود؟

۱) ۴ ۲) ۸

۳) ۱۶ ۴) ۳۲

گزینه ۳

برای برابر شدن تنش های برشی باید نسبت VQ/It در دو نقطه نشان داده شده در شکل (مقطع تبدیل یافته) برابر باشد:



$$\tau_1 = \frac{VQ}{It} = \frac{V(a\times 3a\times a)}{I\times 3a}$$

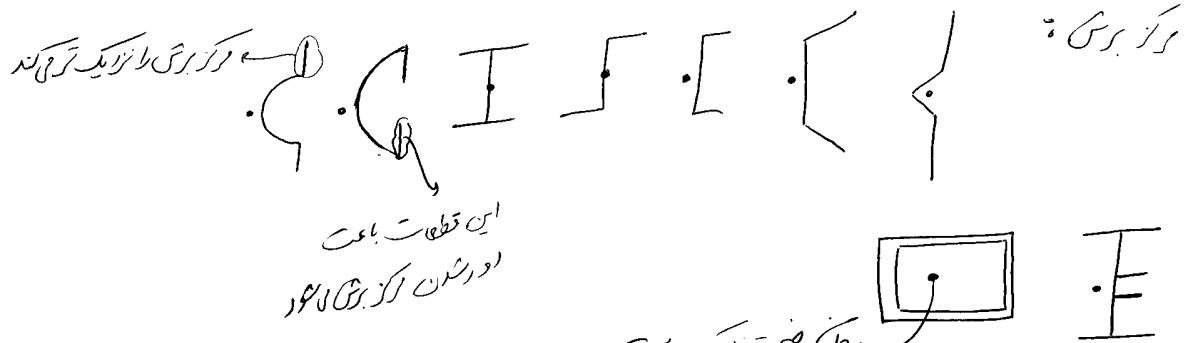
$$\tau_2 = \frac{E_2}{E_1}\times\frac{VQ}{It} = \frac{E_2}{E_1}\times\frac{V\left(a\times 3a\times a + \frac{aE_2}{E_1}\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{4}\right)}{I\times\frac{aE_2}{E_1}}$$

$$\tau_2 = 5\tau_1 \rightarrow \frac{\left(a\times 3a\times a + \frac{aE_2}{E_1}\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{4}\right)}{a} = 5\frac{(a\times 3a\times a)}{3a}$$

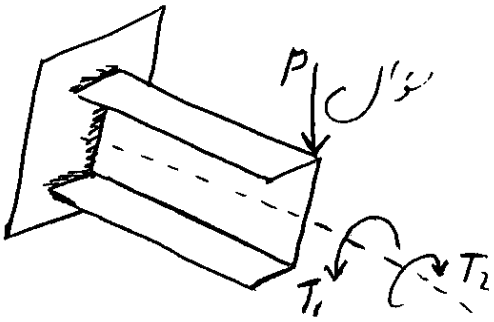
$$\rightarrow \left(3+\frac{1}{8}\frac{E_2}{E_1}\right) = 5 \rightarrow \frac{E_2}{E_1} = 16$$

۱۴-۶-مرکز برش

مرکز برش:



سوال

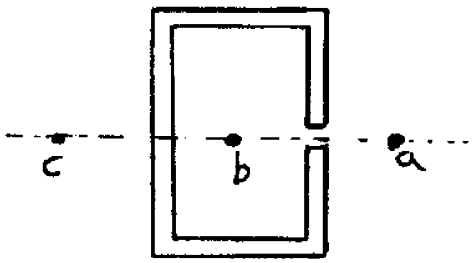


نیروی P بر مرکز برش وارد نشده را این صورت پیچش مقطع به چه صورت خواهد بود (T_1 یا T_2؟)

پاسخ: T_1

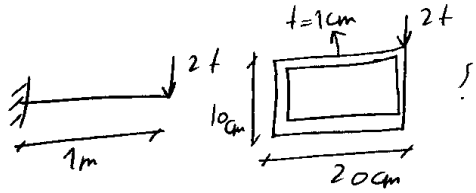
آزاد ۹۱

۵۷- مرکز برش مقطع جدار نازک نشان داده شده کدام نقطه می‌تواند باشد؟

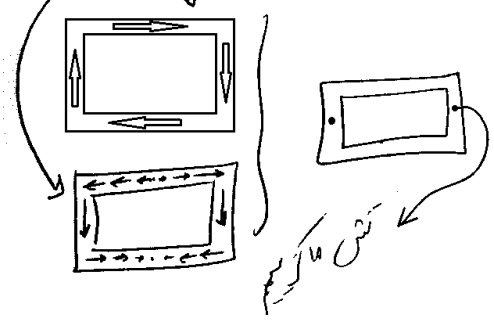


۱) a
۲) b
۳) c
۴) c و a

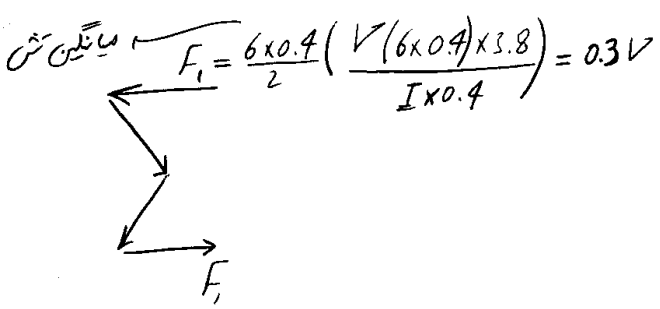
حل: تنش برشی ماکزیمم در مقطع زیر:

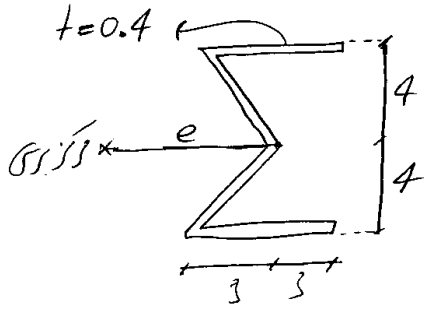


$$\tau = \frac{V\varphi}{It} + \frac{T}{2A_m t} = \frac{2000\times(20\times1\times4.5+2\times4\times2)}{\left(\frac{20\times10^3}{12}-\frac{18\times8^3}{12}\right)\times2} + \frac{2000\times10}{2(19\times9)(1)} = 176.6$$



مثال فاصله e را حساب کنید



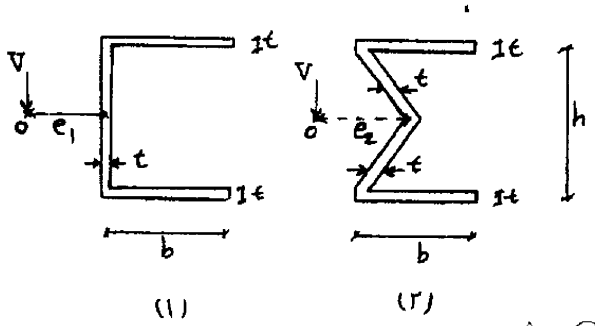


$$I = 2\times\left(0.4\times6\times3.8^2 + \frac{0.4\times5^3}{3}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2\right) = 90.65$$

$$F_1\times7.6 = V\times e \rightarrow e = \frac{F_1\times7.6}{V} = \frac{0.3V\times7.6}{V} = 2.28cm$$

آزاد ۹۱

۵۸- اگر در مقاطع نشان داده شده نقاط o نشان‌دهنده مرکز برش مقطع باشد آنگاه نسبت $\frac{e_1}{e_2}$ کدام است؟



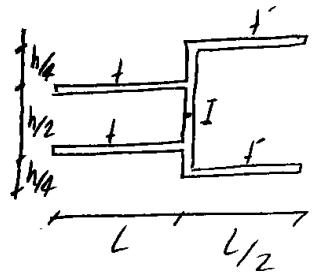
۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) $\frac{5}{2}$

گزینه ۲

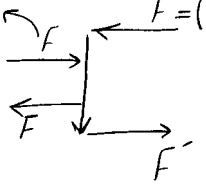
$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \frac{Q}{2It}\times(bt)\times h = \frac{(bt)\times\frac{h}{2}}{2\times\left[\frac{h^3t}{12}+2bt\times(\frac{h}{2})^2\right]}\times(bt)\times h = \frac{b^2}{\frac{h}{3}+2b} \\ e_2 &= \frac{Q}{2It}\times(bt)\times h = \frac{(bt)\times\frac{h}{2}}{2\times\left[\frac{h^3t}{12}+2bt\times(\frac{h}{2})^2\right]}\times(bt)\times h = \frac{b^2}{\frac{h}{3}+2b} \end{aligned}\right\} \rightarrow e1 = e2$$

مثال:

اگر مرکز برش در I باشد رابطه بین t و t' را بدست آورید.



$= \left(\frac{tL}{2}\right)\left(\frac{V\varphi}{It}\right)$



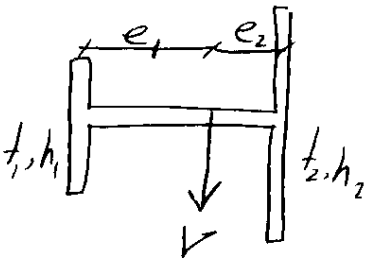
$F' = \left(\frac{t'L}{2\times 2}\right)\left(\frac{V\varphi'}{It'}\right)$

$F' \times \frac{h}{2} = F\frac{h}{4} \Rightarrow \frac{t'L}{2\times 2}\left(\frac{V\varphi'}{It'}\right) \times \frac{h}{2} = \left(\frac{tL}{2}\right)\left(\frac{V\varphi}{It}\right) \times \frac{h}{4}$

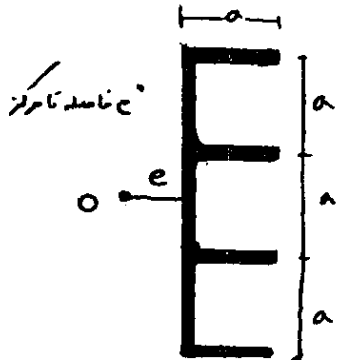
$\Rightarrow \frac{t'\varphi'}{8} = \frac{t\varphi}{8} \rightarrow \frac{t'}{t} = \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{(t\times L \times h/4)}{(t'\times \frac{L}{2}\times \frac{h}{2})} = 1$

مثال:

$e_1 = ?$ (از مرکز برش)



آزاد ۸۴



۲۷- مرکز برش مقطع زیر در چه فاصله ای از جان مقطع قرار دارد؟ (صخامت ثابت و برابر t می باشد.)

۱) 0.28 a

۲) 0.4 a

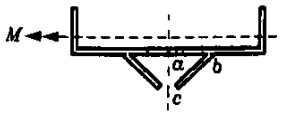
۳) 0.46 a

۴) 0.34 a

گزینه ۴

سراسری ۷۸

۴- مرکز پیچش مقطع شکل زیر کدام نقطه است؟



۱) a

۲) b

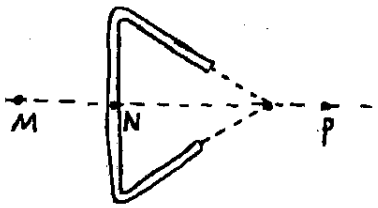
۳) c

۴) بر مرکز مقطع منطبق است که هیچ کدام از نقاط a، b و c نیست.

گزینه ۳

آزاد ۸۳

۲۶- در مقطع زیر محل مرکز برش کجاست؟



۱) M

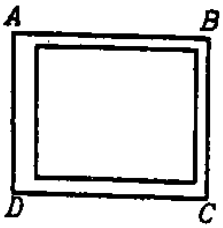
۲) N

۳) P

۴) بسته به ابعاد مقطع هرکدام از گزینه ها می تواند صحیح باشد.

گزینه ۱

آزاد ۸۶



۵۴- در مقطع قوطی شکل زیر محل مرکز برش کجاست؟

۱) در داخل مقطع و نزدیک به جان ضخیمتر می باشد.

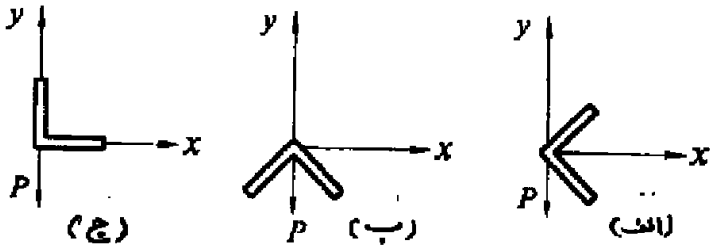
۲) در داخل مقطع و نزدیک به جان نازکتر می باشد.

۳) در خارج مقطع و نزدیک به جان ضخیمتر می باشد.

۴) در خارج مقطع و نزدیک به جان نازکتر می باشد.

سراسری ۹۲- دکتری

۹- اشکال زیر مقاطع یک تیره طره را که در انتهای آزاد تحت بار P قرار گرفته است، نشان می‌دهد. در کدام حالت عضو بدون پیچش خم می‌شود؟



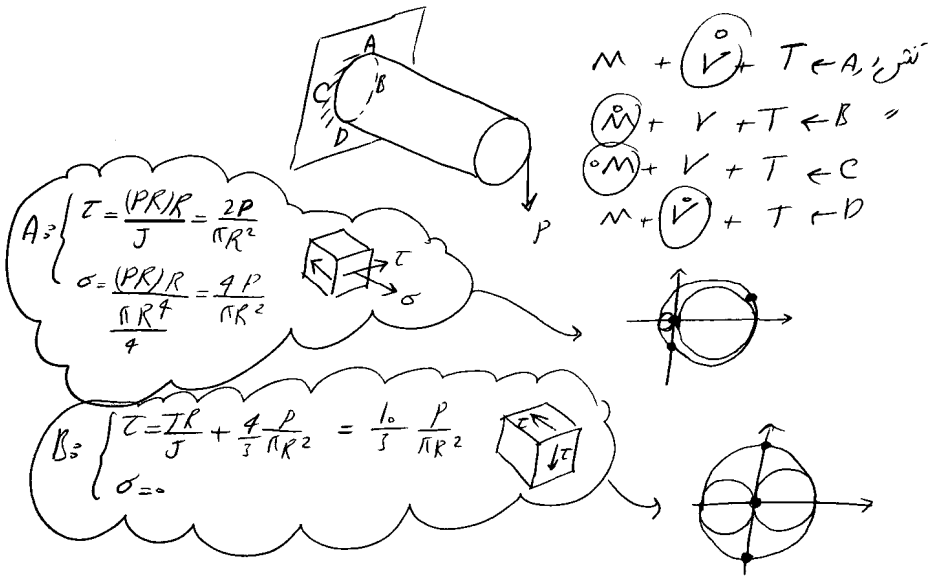
۱) در حالت (ج)

۲) در حالت (ب)

۳) در حالت (الف)

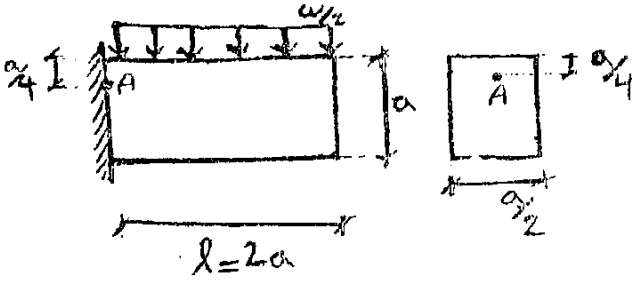
۴) در هر سه حالت

۱۴-۷-ترکیب برش، پیچش و خمش



آزاد ۹۰

۵۸- حداکثر تنش برشی ایجاد شده در نقطه A (ناشی از اثرات برش و خمش) کدام است؟



۱) $\frac{15\,w}{7\,a}$ ۲) $\frac{3\,w}{4\,a}$

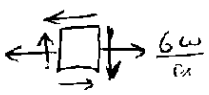
۳) $\frac{3\,w}{5\,a}$ ۴) $\frac{15\,w}{4\,a}$

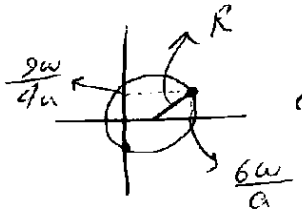
58

$$M = \frac{w}{2}\times\frac{(2a)^2}{2} = wa^2$$
$$V = \frac{w}{2}\times 2a = wa$$

$$\sigma_{خمشی} = \frac{Mc}{I} = \frac{wa^2\times\frac{a}{4}}{\frac{(\frac{a}{2})\times a^3}{12}} = \frac{6w}{a}$$

$$G.S.\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{wa\times(a/4)\times(\frac{a}{2})\times\frac{3a}{8}}{\frac{(\frac{a}{2})\times a^3}{12}\times\frac{a}{2}} = \frac{9w}{4a}$$





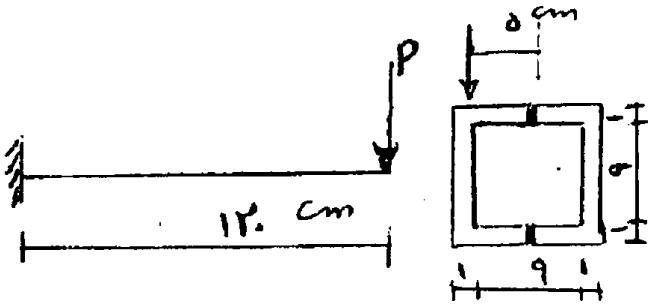
$$\tau_{max} = R = \sqrt{\tau^2 + (\frac{\sigma}{2})^2}$$

$$\rightarrow \tau_{max} = \sqrt{(\frac{9w}{4a})^2 + (\frac{3w}{a})^2} = \frac{3w}{a}\sqrt{(\frac{3}{4})^2 + 1^2} = \frac{15w}{4a}$$

سراسری ۹۰:

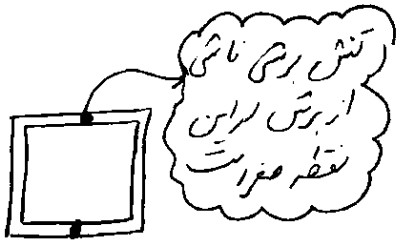
۴۶- مقطع جدار نازک روبه‌رو، مقطع تیری کنسولی است که بار P در انتهای آن و در گوشه فوقانی وارد شده است. این مقطع متشکل از دو ناودانی چوبی است که در بالا و پایین به وسیله چسبی با مقاومت برشی مجاز ۵ مگاپاسکال به هم وصل شده‌اند حداکثر مقدار مجاز P چند کیلو نیوتن است؟

۱) ۱۲
۲) ۴۰
۳) ۲۰
۴) ۵۰



46

تیر تحت اثر ترکیبی از خمش، برش و پیچش قرار دارد از آنجا که تنش مجاز خود چوب را ندارد، فقط باید چسب را کنترل کنیم:



در مقاطع جدار نازک بسته داریم ← $\tau = \frac{T}{2A_m t}$ تنش برشی ناشی از پیچش

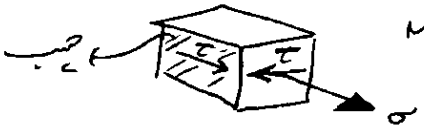
$$\tau = \frac{(P \times 5)}{2 \times (10 \times 10) \times 1} = 0.025P \frac{N}{cm^2}$$

A_m سطح محصور در t

این تنش باید کمتر از مقدار مجاز آن (5MPa) باشد

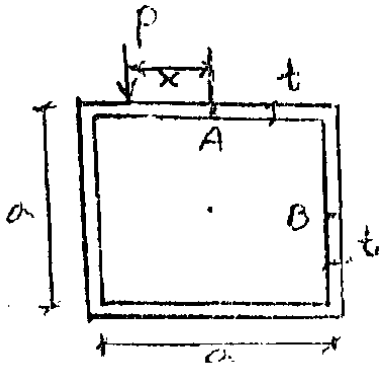
$$\rightarrow 0.025P < \frac{500N}{cm^2} \rightarrow P < 20000\ N \Rightarrow P < 20KN$$

نکته: محل چسب علاوه بر تنش برشی ناشی از پیچش، تحت اثر تنش محوری ناشی از خمش نیز قرار دارد.



با جمع شدن المان تنش برشی ماکزیمم بیشتر از τ خواهد بود $\left(\sqrt{(\frac{\sigma}{2})^2+\tau^2}\right)$ ولی این تنش برشی اگر در صفحه چسب خواهد بود (بر چسب اثر می‌کند)

۵۹- مقدار x چقدر باشد تا تنش برشی در نقاط A و B (وسط اضلاع مقطع) با هم برابر شود؟



۱) $\frac{9}{16}a$

۲) $\frac{3}{16}a$

۳) $\frac{9}{2}$

۴) $\frac{9}{10}a$

$$\tau_A = \frac{VQ}{It} + \frac{T}{2A_m t} = 0 + \frac{P_x}{2a^2 t}$$

$$\tau_B = \frac{VQ}{It} + \frac{T}{2A_m t} = \frac{P\left(at \times \frac{a}{2} + 2\,\frac{a}{2}t \times \frac{a}{4}\right)}{\frac{2a^3 t}{3} \times 2t} - \frac{P_x}{2a^2 t}$$

$$\rightarrow \tau_B = \frac{9P}{16at} - \frac{P_x}{2a^2 t} \Longrightarrow \tau_A = \tau_B \Rightarrow \frac{P_x}{a^2 t} = \frac{9P}{16at} \rightarrow x = \frac{9a}{16}$$

۹۰،۳،۲۶
حسین زاده

۶۰ تنش در نقاط A، D، E، F و C صفر است

گزینه ۴ صحیح است

نقطه انتهایی

Q آن برابر صفر است

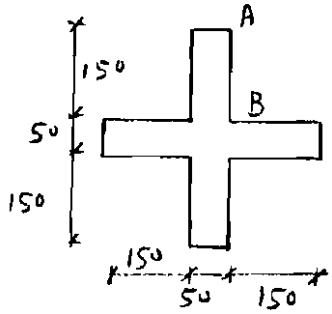
نقطه تقارن

نقطه تقارن

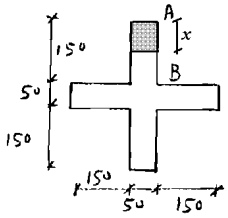
۱۴-۸-سهم برش

سراسری ۸۳

۵۷- مقطع صلیبی مطابق شکل روبرو تحت اثر نیروی برشی V قرار دارد. چه سهمی از این نیرو توسط جان AB تحمل می گردد؟



۱) ٪۲۵
۲) ٪۳۵
۳) ٪۳۹
۴) ٪۴۴



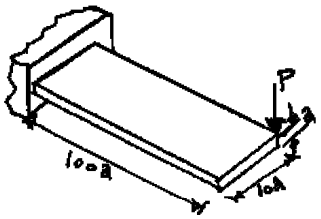
$$\left.\begin{array}{c} Q_x = 50x \times \left(175 - \frac{x}{2}\right) \\ \tau_x = \frac{VQ}{It} = \frac{V \times 50x \times \left(175 - \frac{x}{2}\right)}{I \times 50} \\ I = \frac{50 \times 350^3}{12} + \frac{300 \times 50^3}{12} = 181770833 \end{array}\right\} V_{AB} = \int_0^{150} \tau_x (50 \times dx) = \int_0^{150} \frac{V \times 50x\left(175 - \frac{x}{2}\right)}{I \times 50} \times 50dx$$

$$V_{AB} = \frac{50V}{I} \times \int_0^{150} x\left(175 - \frac{x}{2}\right)dx = 0.387V$$

۱۴-۹-تغییر شکل برشی

سراسری ۹۳- دکتری

۷- یک تیر با مقطع مستطیل و به صورت کنسول تحت بار P در انتهای گوشه مطابق شکل قرار می‌گیرد. هرگاه مدول ارتجاعی آن E و ضریب پواسون ν و رفتار مصالح کاملاً الاستیک فرض شوند، تغییر مکان قائم انتهای آزاد تحت بار P کدام است؟



۱) $\delta_v \simeq \frac{1000P}{Ea}\{400 + 15(1+\nu)\}$

۲) اثر پیچش قابل صرف‌نظر نبوده و تغییر مکان قائم $\delta_v \simeq \frac{410000P}{Ea}$

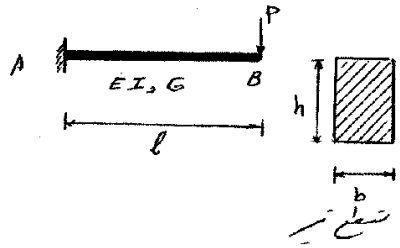
۳) اثر پیچش مهم و تغییر مکان قائم $\delta_v \simeq \frac{400100P}{Ea}$

۴) اثر پیچش قابل صرف‌نظر بوده و تغییر مکان قائم $\delta_v \simeq \frac{400000P}{Ea}$

سراسری ۸۹

۵۸- **تغییر مکان قائم نقطه B با در نظر گرفتن انرژی برشی و خمشی نسبت به حالتی که فقط انرژی خمشی در نظر گرفته شود چند درصد افزایش می‌یابد؟ فرض کنید** $(\frac{E}{G}=2/4 \ , \ \frac{l}{h}=10)$

۱) ٪۱/۰۰۷۲
۲) ٪۰/۷۲
۳) ٪۱/۰۷۲
۴) ٪۱/۷۲



مستطیل

$$\left.\begin{aligned}\Delta_{\text{برشی}}&=\frac{PL}{GA_v}=\frac{P(10h)}{\left(\frac{E}{2.4}\right)\left(\frac{5}{6}bh\right)}=\frac{28.8P}{Eb}\\ \Delta_{\text{خمشی}}&=\frac{PL^3}{3EI}=\frac{P(10h)^3}{3(E)\left(\frac{bh^3}{12}\right)}=\frac{4000P}{Eb}\end{aligned}\right\}\Delta_{\text{کل}}=\frac{4028.8P}{Eb}$$

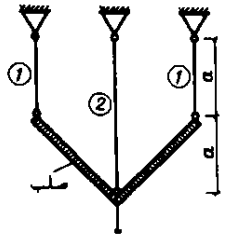
$$\text{درصد افزایش}=\frac{\Delta_{\text{برشی}}}{\Delta_{\text{خمشی}}}=\frac{28.8}{4000}=0.0072=\%0.72$$

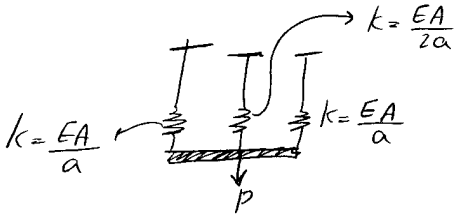
۱۵-مدل سازی با فنر

سراسری ۸۰

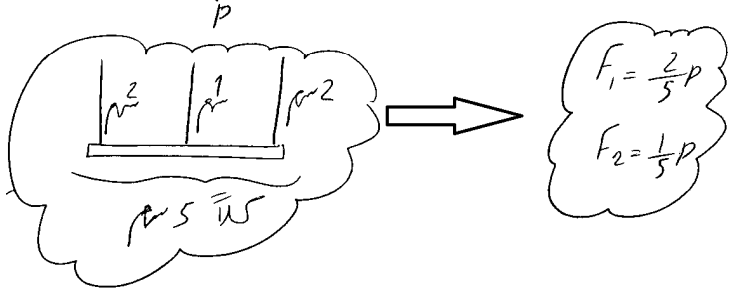
جنس میله‌های ۱ و ۲ یکسان و سطح مقطع آنها مساوی است. زیر اثر بار P نیروهای F_1 و F_2 وارد بر میله‌های (۱) و (۲) چقدر است؟

۱) $F_1=F_2=\frac{P}{3}$
۲) $F_2=P \ , \ F_1=0$
۳) $F_2=\frac{P}{2} \ , \ F_1=\frac{P}{4}$
۴) $F_2=0/2P \ , \ F_1=0/4P$





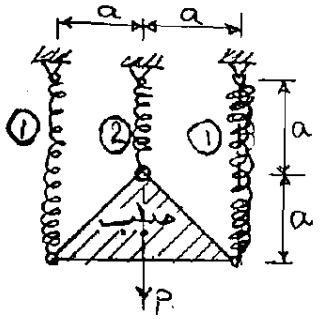
باتوجه به تقارن میله صلب حرکت قائم خواهد داشت بنابراین نیروی P به نسبت سختی تقسیم می‌شود



سراسری ۸۲

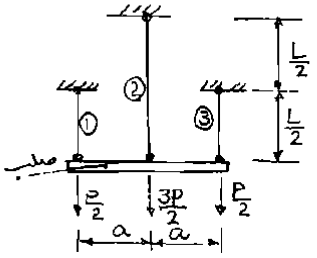
۳۸- در شکل روبرو سختی هر سه فنر مساوی است. نیروی وارد به هر فنر چقدر است؟

۱) $F_1=F_2=\frac{P}{3}$
۲) $F_1=0 \ , \ F_2=P$
۳) $F_1=\frac{P}{4} \ , \ F_2=\frac{P}{2}$
۴) $F_1=\frac{P}{6} \ , \ F_2=\frac{2P}{3}$



سراسری ۸۱

۳۹- در شکل مقابل میله‌های ۱، ۲ و ۳ با جنس و سطح مقطع یکسان تحت اثر نیروهای وارده قرارگرفته‌اند. نیروی وارده به هرکدام از میله‌ها چقدر است؟

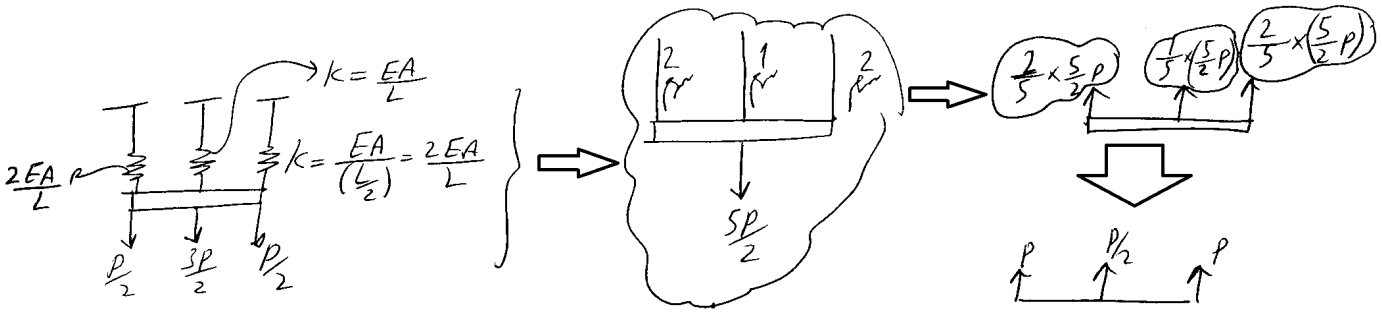


۱) P ، $0/5P$ ، P

۲) $\frac{P}{2}$ ، $\frac{3P}{2}$ ، $\frac{P}{2}$

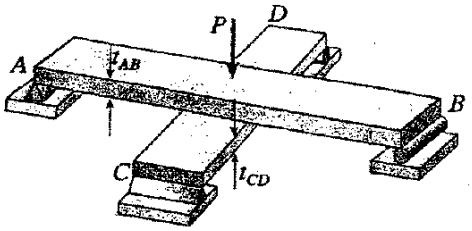
۳) $\frac{5P}{8}$ ، $\frac{5P}{4}$ ، $\frac{5P}{8}$

۴) $\frac{5P}{6}$ ، $\frac{5P}{6}$ ، $\frac{5P}{6}$



سراسری ۸۹

تیرهای **AB** و **CD** از یک جنس و با عرض یکسان مطابق شکل عمود بر همدیگر در یک صفحه روی همدیگر قرار گرفته‌اند. قبل از اعمال بار **P** هیچ نیروی در تیرها وجود ندارد (از وزن آنها صرفنظر می‌شود) در صورتیکه $L_{AB} > L_{CD}$ باشد، نسبت t_{AB} / t_{CD} چقدر باشد تا اینکه عکس‌العمل‌های هر چهار تکیه‌گاه برابر شوند؟

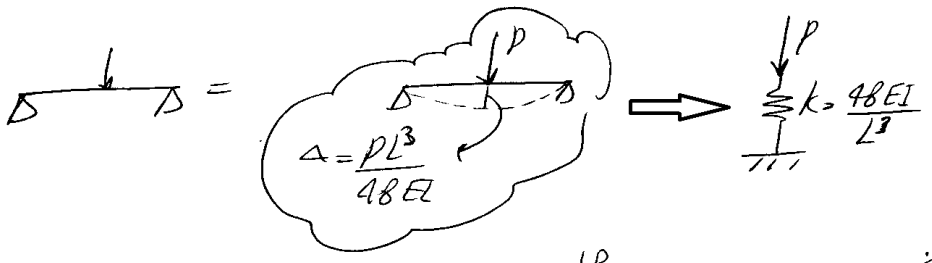


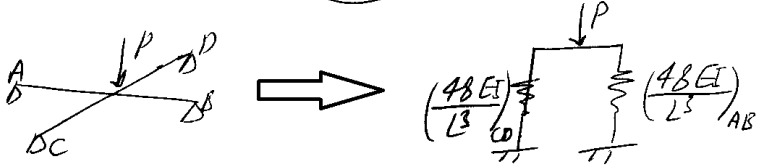
۱) $\frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{L_{CD}}{L_{AB}}$

۲) $\frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{L_{AB}}{2L_{CD}}$

۳) $\frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{2L_{AB}}{L_{CD}}$

۴) $\frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{L_{AB}}{L_{CD}}$



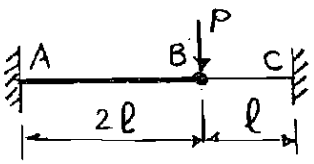


مشاهده کرد که عکس العمل ها یک کار است
پس سهم ها باید برابر باشد

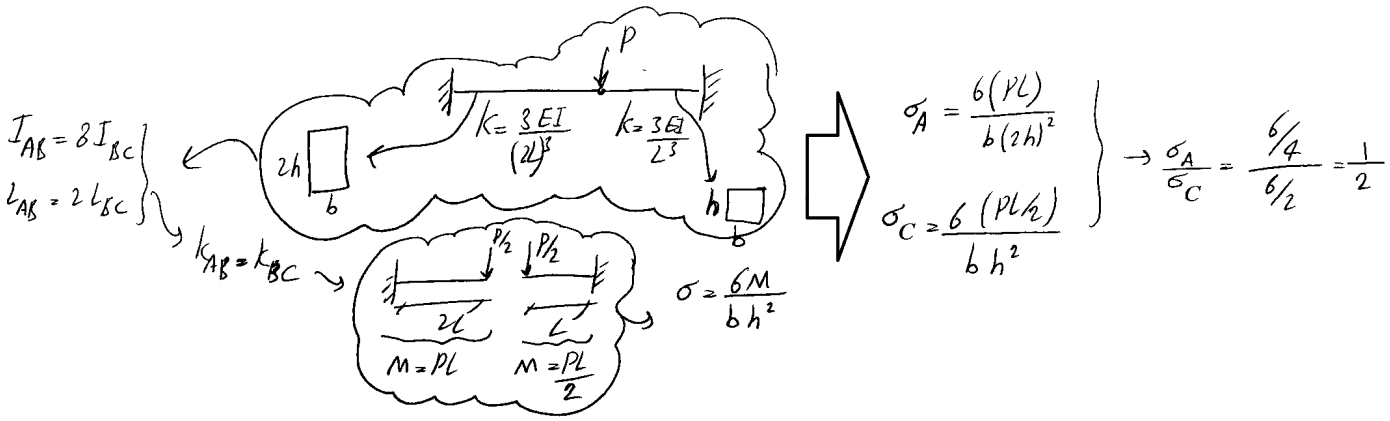
$$\left(\frac{48E\frac{bt^3}{12}}{L^3}\right)_{AB} = \left(\frac{48E\frac{bt^3}{12}}{L^3}\right)_{CD} \Rightarrow \left(\frac{t}{L}\right)_{AB} = \left(\frac{t}{L}\right)_{CD} \rightarrow \frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{L_{AB}}{L_{CD}}$$

سراسری ۸۲

۳۳- مقطع تیر شکل زیر مربع مستطیل به پهنای ثابت است ولی ارتفاع مقطع در قسمت AB دو برابر قسمت BC می باشد، نسبت $\frac{\sigma_{A\,max}}{\sigma_{C\,max}}$ چقدر است؟

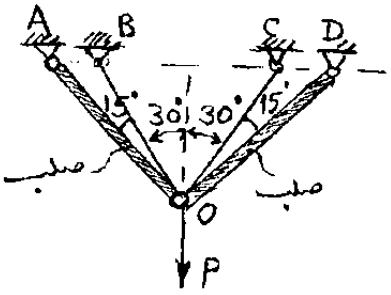


۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۴}$



سراسری ۸۳

۴۷- در شکل روبرو میله های OB و OC الاستیک و یکسان می باشند. نیروی وارد به میله ها کدام است؟



۱) نیروهای هر کدام از میله ها $\frac{P}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}$

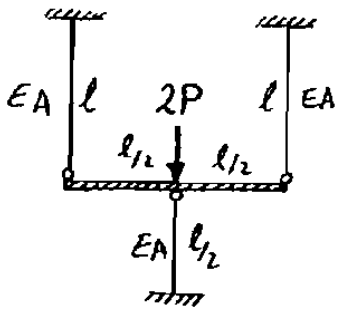
۲) میله های الاستیک $\frac{P}{۲\sqrt{۳}}$ ، میله های صلب $\frac{P}{۲\sqrt{۲}}$

۳) میله های الاستیک $\frac{P}{\sqrt{۳}}$ ، میله های صلب صفر

۴) میله های الاستیک صفر، میله های صلب $\frac{P\sqrt{۲}}{۲}$

سراسری ۸۳

۵۰- میله صلب ABC توسط سه میله مطابق شکل تکاه داشته شده است. نیروی سه میله به ترتیب برابر است با:

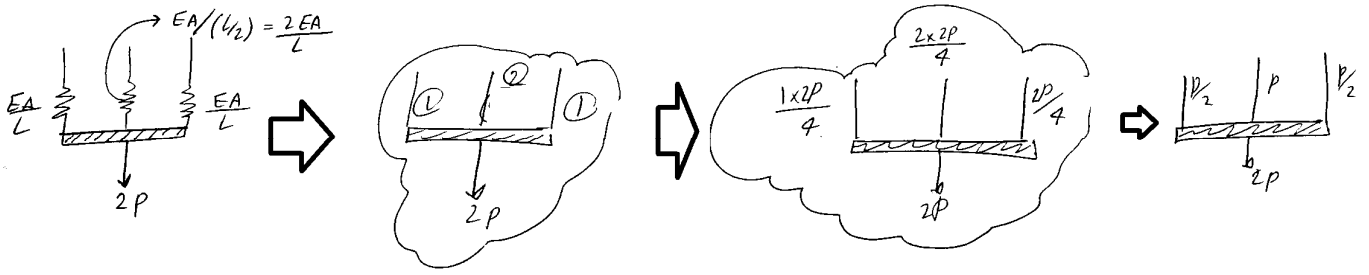


۱) $\frac{P}{۳}, \frac{۴P}{۳}, \frac{P}{۳}$

۲) $\frac{۲P}{۳}, \frac{۲P}{۳}, \frac{۲P}{۳}$

۳) $\frac{۳P}{۴}, \frac{P}{۲}, \frac{۳P}{۴}$

۴) $\frac{P}{۲}, P, \frac{P}{۲}$



سراسری ۸۴

۵۷- دو میله ① و ② از یک جنس و با یک طول و هر دو با مقطع دایره می‌باشند، به طوری که قطر میله ① دو برابر قطر میله ② است.

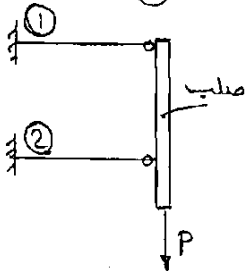
نسبت $\frac{\sigma_{1max}}{\sigma_{2max}}$ چقدر است؟

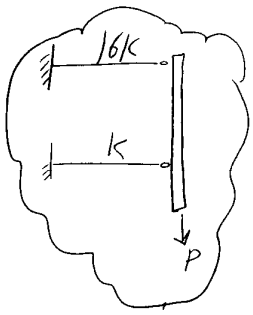
۱) ۱

۲) ۲

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۱}{۸}$





سختی فنر را باید در نظر بگیریم $\left(\frac{3EI}{L^3}\right)$ از آنجا که تکیه میله با لایی دو برابر است

پس I آن نیز 2^4 برابر است

$\frac{16P}{17} \rightarrow \sigma_1 = \frac{\left(\frac{16P}{17}L\right)(2R)}{\frac{\pi}{4}(2R)^4}$

$\frac{P}{17} \rightarrow \sigma_2 = \frac{\left(\frac{P}{17}L\right)R}{\frac{\pi}{4}R^4}$

$\rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2$

سراسری ۸۹

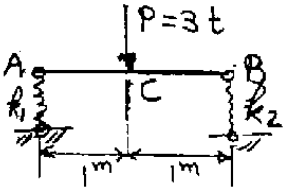
۵۶- تیر شکل روبه‌رو روی دو فنر F_1 و F_2 قرار گرفته است به طوری که $k_1 = ۲ \frac{t}{cm}$ و $k_2 = ۱ \frac{t}{cm}$ است. اگر تغییر مکان وسط تیری بر روی دو تکیه‌گاه ساده مساوی $\frac{PL^3}{۴۸EI}$ باشد، تغییر مکان C وسط تیر نشان داده شده چند سانتی‌متر است؟ $EI = ۱۰^9\ kgcm^2$

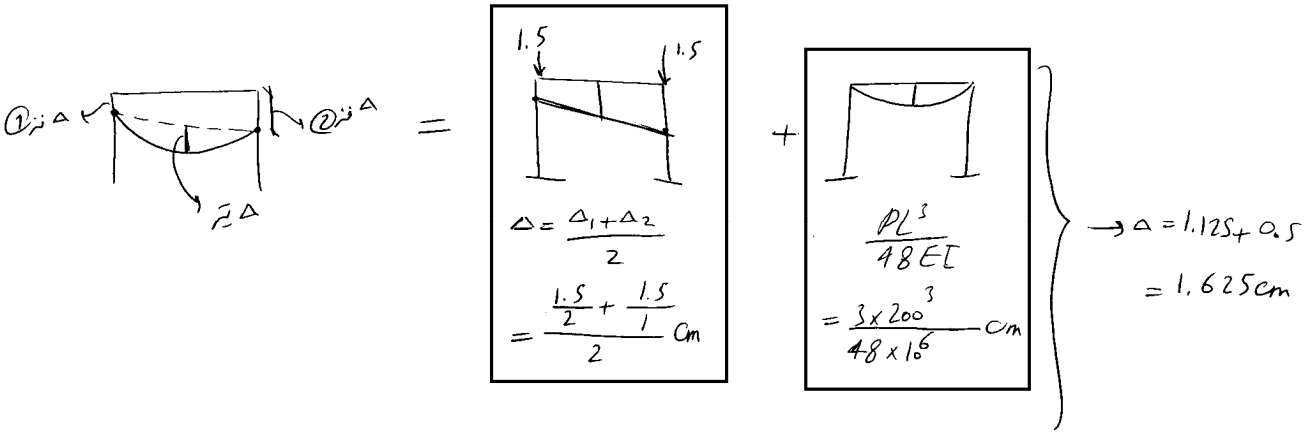
۱) ۱/۶۲۵

۲) ۱/۲۵

۳) ۱/۱۲۵

۴) ۲/۲۵

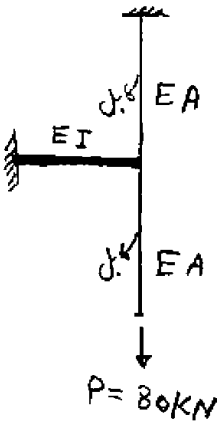


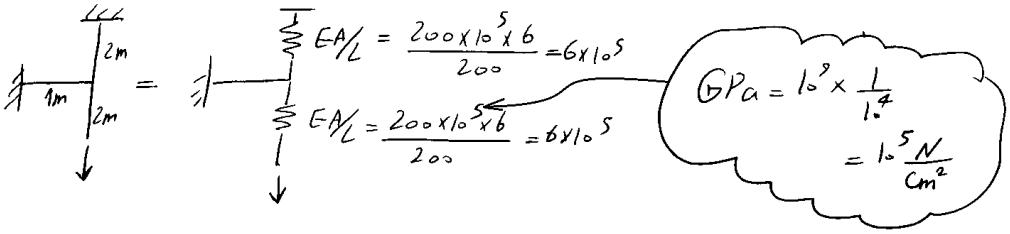


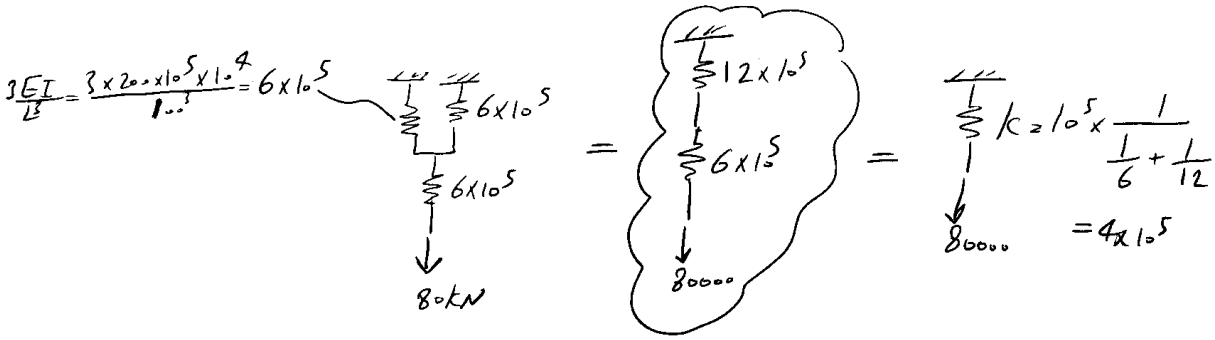
سراسری۸۹

۵۷- بار $P = ۸۰\ kN$ به انتهای کابل به طول ۲ متر مطابق شکل وارد می‌شود. انتهای کابل مزبور به انتهای یک تیر کنسول به طول یک متر بسته شده و همچنین کابل دیگری به طول ۲ متر نیز انتهای تیر را به سقف بسته است. $E = ۲۰۰\ GPa$ و ممان اینرسی تیر برابر $۱۰۰۰۰\ cm^۴$ و سطح مقطع هر کابل برابر $۶\ cm^۲$ می‌باشد. مقدار جابه‌جایی قائم محل اعمال بار $P = ۸۰kN$ بر حسب mm چقدر است؟

۱) ۴
۲) ۲
۳) ۱
۴) $\frac{۴}{۹}$





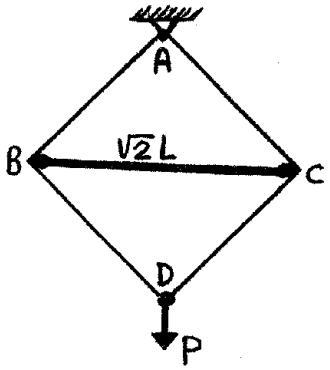


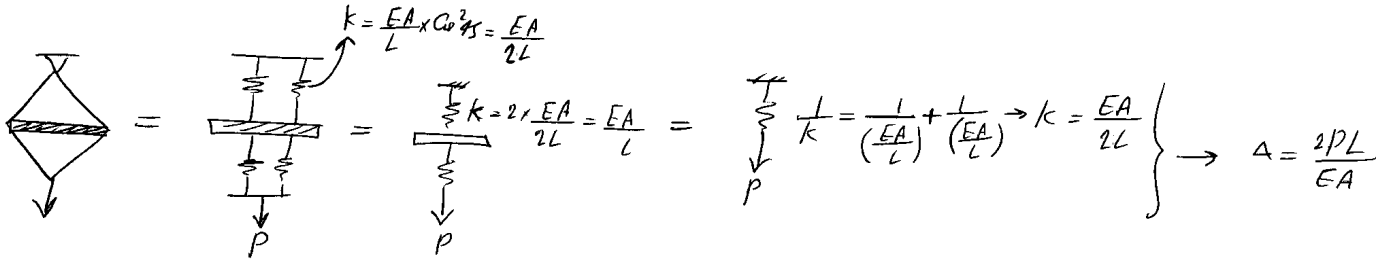
$$\longrightarrow \Delta = \frac{۸۰۰۰۰}{۴\times۱۰^۵} = ۰.۲\ cm = ۲mm$$

سراسری ۸۹

۵۴- در سازه نشان داده شده میله BC صلب است. جا به جایی نقطه D کدام است؟ (AE و L برای کلیه اعضای مورب ثابت است).

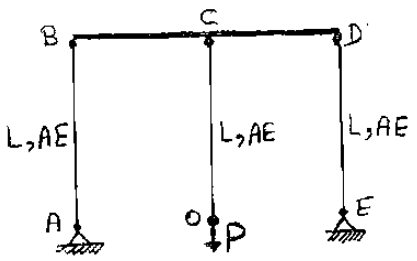
۱) $\frac{PL}{AE}$
۲) $\frac{۲PL}{AE}$
۳) $\frac{PL}{۲AE}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}PL}{AE}$





سراسری ۸۶

۴۷- تغییر مکان نقطه O در صورت صلب بودن عضو BCD چقدر است؟



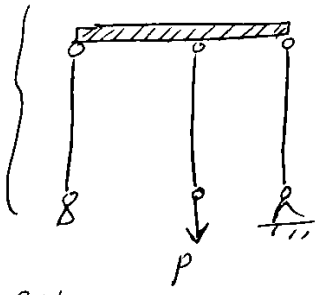
۱) $\frac{PL}{AE}$

۲) $\frac{۳PL}{۲AE}$

۳) $\frac{PL}{۲AE}$

۴) $\frac{PL}{۲AE}$

با توجه به تقارن نیروی میله‌های کناری $\frac{P}{2}$ است



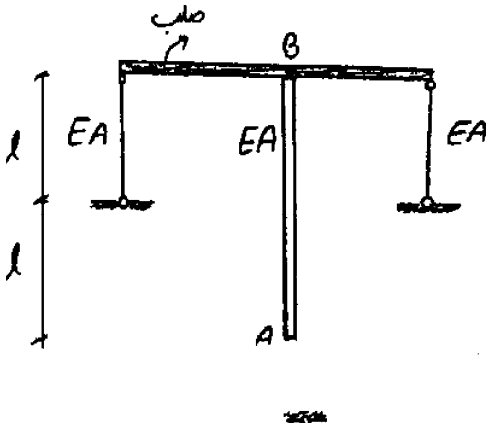
$\Delta_{\text{میله کناری}} = \frac{PL}{2EA}$

$\Delta_{\text{میله وسط}} = \frac{PL}{EA}$

$\Delta_{\text{کل}} = \frac{PL}{2EA} + \frac{PL}{EA} = \frac{3PL}{2EA}$

آزاد ۹۱

۴۱- در سازه متقارن نشان داده شده وزن واحد طول میله AB برابر با q می‌باشد و از وزن سایر اعضاء صرفنظر شده است. تغییرمکان نقطه A کدام است؟



۱) $2\frac{q\ell^2}{EA}$

۲) $3\frac{q\ell^2}{EA}$

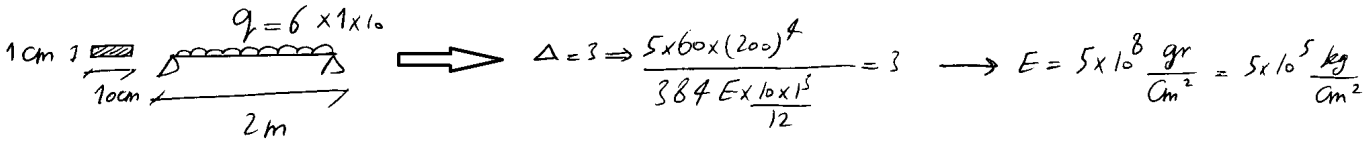
۳) $4\frac{q\ell^2}{EA}$

۴) $5\frac{q\ell^2}{EA}$

سراسری۸۶

۵۹- نواری فلزی بطول ۲ متر و به پهنای ۱۰ cm و به ضخامت یک سانتی‌متر را که وزن مخصوص آن $۶\frac{grf}{cm^۳}$ می‌باشد روی دو تکیه‌گاه در دو انتهای آن قرار داده‌ایم. جابجایی آن در وسط که از رابطهٔ $\frac{۵qL^۴}{۳۸۴EI}$ بدست می‌آید مساوی سه سانتی‌متر شده است. مقدار E چقدر است؟ (بر حسب $\frac{kgf}{cm^۲}$)

۱) $۰/۲۵\times۱۰^۴$ ۲) $۰/۵\times۱۰^۶$ ۳) ۴×۱۰^۴ ۴) $۱۰^۸$



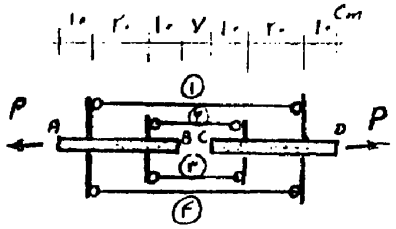
سراسری ۹۰

۵۴- در شکل مقابل دو میله AB و CD توسط چهار میله ۱ و ۲ و ۳ و ۴ متصل شده و تحت دو نیروی $p=۱۰\,ton$ قرار گرفته است. نیروهای میله‌های ۱ و ۲ به ترتیب چند تن می‌باشند؟

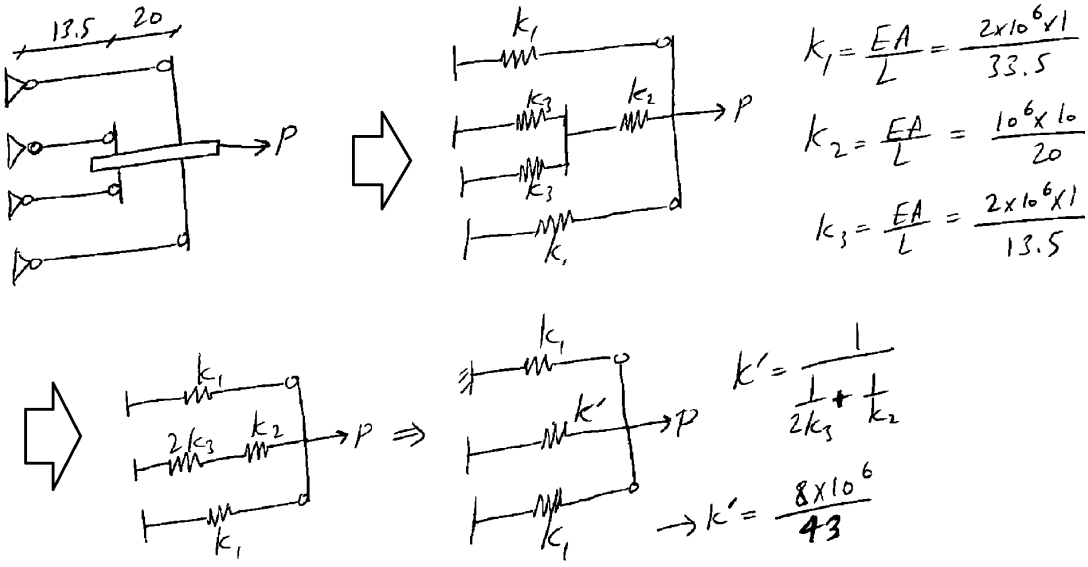
$E=۱۰^۶\ kg/cm^۲$ $A=۱۰\,cm^۲$: اعضاء AB و CD

$E=۲\times۱۰^۶\ kg/cm^۲$ $A=۱\,cm^۲$: میله‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴

۱) ۳/۹۵ ، ۱/۰۵
۲) ۱/۹۵ ، ۳/۰۵
۳) ۳/۰۵ ، ۱/۹۵
۴) ۱/۰۵ ، ۳/۹۵



با توجه به تقارن، هر کدام از میله ها را یک فنر فرض می کنیم:



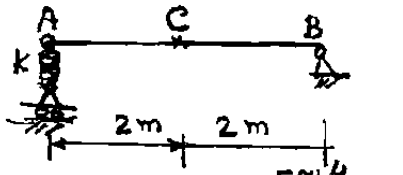
$\text{میله ۱ سهم} = \frac{k_1}{2k_1+k'}\times P = 1.95\ ton$ (10 ton)

$\text{میله ۲ سهم} = \frac{1}{2}\left(\frac{k'}{2k_1+k'}\right)\times 10 = 3.05\ ton$

نصف نیروی دو میله بالایی

سراسری۸۵

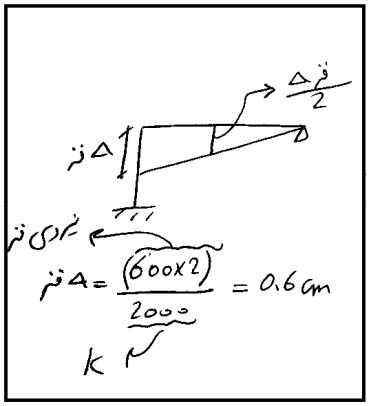
۴۲- بر تیر شکل روبرو بارگسترده‌ای به شدت $۶۰۰\frac{kg}{m}$ وارد می‌شود. ضریب فنر $k=۲۰۰۰\frac{kg}{cm}$ ، $I=۵۰۰cm^۴$ و $E=۲\times۱۰^۶\frac{kg}{cm^۲}$. تغییر مکان وسط دهانه بر حسب cm چقدر است؟



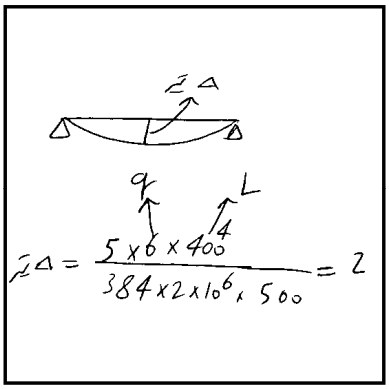
$(\delta=\frac{5qL^4}{384EI})$

(δ تغییر مکان وسط دهانه تیر ساده AB تحت بار گسترده q می‌باشد).

۱) ۲٫۶
۲) ۲٫۳
۳) ۲
۴) ۱٫۷



+

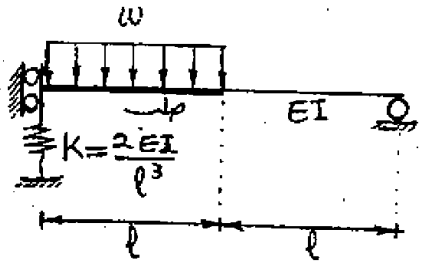


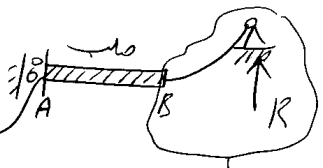
⇒ $\Delta=\frac{0.6}{2}+2=2.3$

سراسری ۸۸

۷۲- در تیر شکل مقابل، نیرو در فنر کدام است؟

۱) $0.5\ wl$
۲) $0.3\ wl$
۳) $0.4\ wl$
۴) $0.2\ wl$

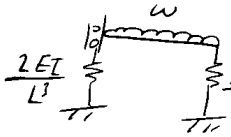




θ_A اینجا صفر است و چون میله صلب است

پس θ_B نیز صفر است

θ_B صفر است و این قسمت مانند یک تیر ساده است



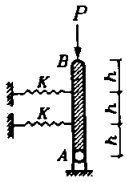
نیروی فنر جدید $=\frac{2}{2+3}\times(w\times L)=\frac{2wL}{5}=0.4wL$

۱۶-کمانش

۱۶-۱-کمانش ستون صلب

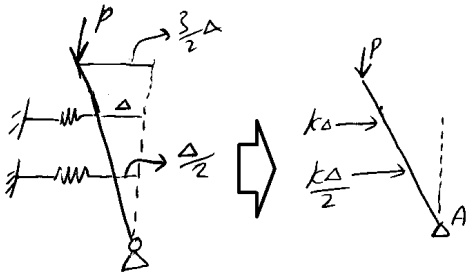
سراسری۷۹

مطلوبست محاسبه و تعیین بار بحرانی سازه در شکل مقابل:



۱) $\frac{5Kh}{3}$ ۲) $\frac{4Kh}{3}$

۳) $2Kh$ ۴) $\frac{Kh}{2}$



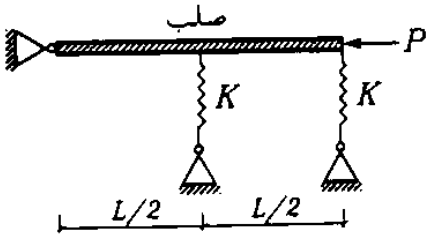
ابتدا تغییر شکل سازه را تصور می کنیم ؛

$\sum M_A = 0 \curvearrowright k\Delta \times 2h + \frac{k\Delta}{2} \times h - P \times \frac{3\Delta}{2} = 0$

$\rightarrow P = \frac{5kh}{8}$

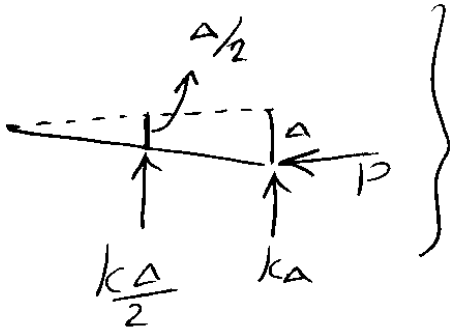
تمرین: سراسری۷۴

۲- بار بحرانی شکل مقابل چقدر است؟



۱) KL ۲) $\frac{5KL}{4}$

۳) $\frac{3KL}{4}$ ۴) ∞



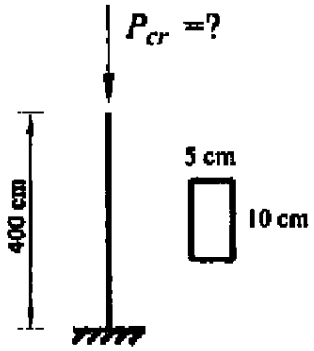
$\rightarrow P\Delta = \frac{k\Delta}{2} \times \frac{L}{2} + k\Delta \times L$

$\rightarrow P = \frac{5kL}{4}$

۱۶-۲-کمانش ستون الاستیک

سراسری ۹۲- دکتری

۶- بار بحرانی ستون روبه‌رو، چند تن است؟ مدول ارتجاعی $E = 2\times10^6 \frac{kg}{cm^2}$ است.



۱) ۳٫۲۱

۲) ۲۶٫۲۳

۳) ۱۲٫۸۵

۴) ۵۱٫۴۰

آزاد ۸۵

۸۰- در ستون زیر بار فشاری P چنان است که همواره امتداد آن از تکیه گاه A می گذرد. بار بحرانی ستون چقدر است؟

۱) $\frac{\pi^2 EI}{2l^2}$

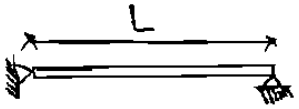
۲) $\frac{\pi^2 EI}{l^2}$

۳) $\frac{\pi^2 EI}{3l^2}$

۴) $\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$

سراسری ۸۱

۴۰- مقدار تغییرات درجه حرارتی (ΔT) که قادر است ستون در سر مفصلی بطول L و ضریب انبساطی α را به حد کمانش برساند، کدام است؟



۱) $\frac{\pi^2 EI}{\alpha L^2}$

۲) $\frac{2\pi^2 I}{A\alpha L^2}$

۳) $\frac{\pi^2 I}{A\alpha L^2}$

۴) $\frac{\pi^2 I}{2A\alpha L^2}$

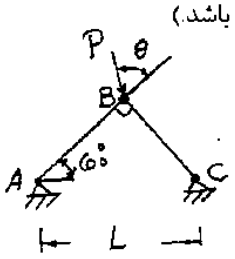
نیروی محوری که به علت حرارت در مقطع ایجاد می‌گردد

$$\left.\begin{array}{l} P = (\alpha \Delta T L)\frac{EA}{L} \\ P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \Delta T L \frac{EA}{L} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \rightarrow \Delta T = \frac{\pi^2 I}{\alpha L^2 A}$$

نیروی کمانشی

سراسری ۸۲

۴۱- خرپای ABC از دو میله باریک با مقطع و جنس یکسان تشکیل شده است. با فرض اینکه فرو ریختن خرپا در اثر کمانش اعضای آن صورت گیرد، تحت چه زاویه «θ» می توان بیشترین بار P را بر خرپا وارد نمود؟ (با فرض اینکه $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ باشد.)



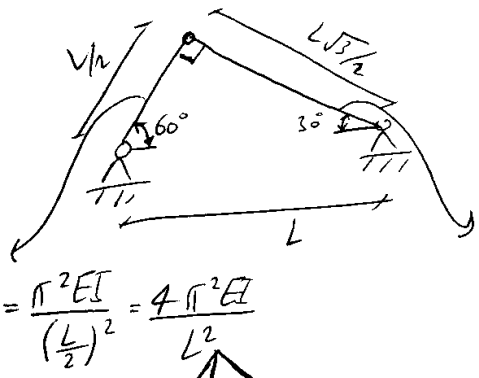
۱) $\tan\theta = \sqrt{3}$

۲) $\cot\theta = \sqrt{3}$

۳) $\tan\theta = \frac{1}{3}$

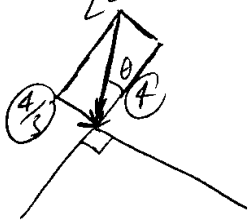
۴) $\cot\theta = \frac{1}{3}$

بار P باید طوری وارد شود تا هر دو میله همزمان به کمانش برسند



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}L\right)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{3L^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$



$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{4/3}{4}\right) = tg^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow tg\theta = \frac{1}{3}$$

سراسری ۸۴

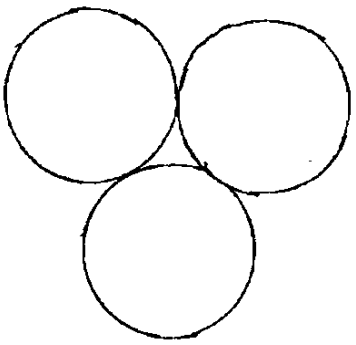
۶۰- شعاع ژیراسیون مقطع تیر یا ستونی که از اتصال سه لوله متشابه مطابق شکل درست شده چند برابر شعاع ژیراسیون هر یک از لوله‌ها می‌باشد؟ (فرض می‌شود که جداره لوله‌ها ضخامت اندکی در مقایسه با شعاع آنها داشته باشد.)

۱) ۱٫۵۳

۲) ۲٫۶۵

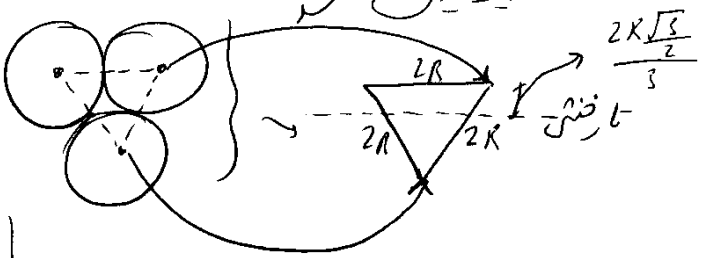
۳) ۱٫۲۹

۴) ۲٫۱۶



$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$

شعاع ژیراسیون سه



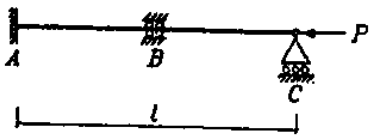
$I = 3\left(\pi R^3 t\right) + 2\underbrace{\left[2\pi R t \times \left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^2\right]}_{Ad^2}$

$+\left[2\pi R t \times \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2\right] = 7\pi R^3 t$

$\rightarrow r = \sqrt{\frac{7\pi R^3 t}{3(2\pi R t)}} = \sqrt{\frac{7}{6}}R$

آزاد ۸۶

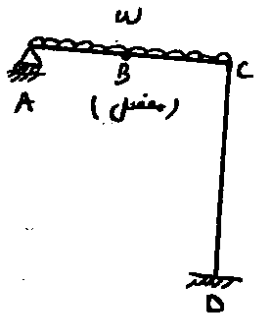
۶۰- در سازه زیر تکیه گاه میانی B را در چه فاصله ای از تکیه گاه A قرار دهیم تا بار بحرانی سازه ماکزیمم شود؟ (EI = con st)



۱) $0/66\,l$ ۲) $0/5\,l$ ۳) $0/42\,l$ ۴) $0/58\,l$

گزینه ۴

آزاد ۸۵



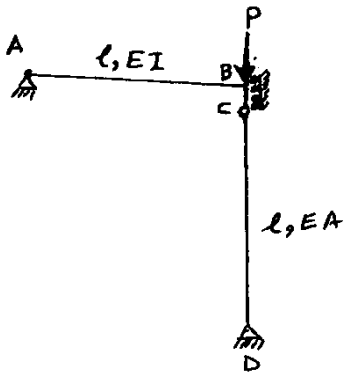
۷۰- بار گسترده بحرانی قاب زیر چقدر است؟

$(AB = BC = \frac{l}{2} \ , \ CD = l \ , \ EI = Const)$

۱) $\frac{\pi^2 EI}{3l^3}$ ۲) $\frac{4\pi^2 EI}{3l^3}$ ۳) $\frac{9\pi^2 EI}{3l^3}$ ۴) $\frac{16\pi^2 EI}{3l^3}$

آزاد ۸۴

۳۰- بار بحرانی سازه زیر چقدر است؟ ($I_{AB} = 2AI^2$ و بار بحرانی ستون CD برابر P_E می باشد.)



۱) P_E
۲) $3P_E$
۳) $7P_E$
۴) $5P_E$